UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

GEGRÜNDET 1890 DURCH G. v. ESCHERICH UND E. WEYR
MIT DEM TITEL "MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK"

FORTGEFÜHRT DURCH
L. GEGENBAUER · F. MERTENS · W. WIRTINGER
H. HAHN · PH. FURTWÄNGLER · J. RADON

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON
E. HLAWKA · N. HOFREITER · K. MAYRHOFER
WIEN WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

62. BAND, 2. HEFT
MIT 3 TEXTABBILDUNGEN
AUSGEGEBEN IM MÄRZ 1958

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1958

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5, Tel. 63 76 71 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

62. Band/2. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Ohmann, D. Ein allgemeines Extremalproblem für konvexe Körper . . . 97

Al-Salam, W. A. and **L. Carlitz.** Finite Summation Formulas and Congruences for Legendre and Jacobi Polynomials 108

Brauner, H. Über die durch einen quadratischen Komplex der Charakteristik (11) (112) vermittelte Projektion I. 119

Brauner, H. Über die durch einen quadratischen Komplex der Charakteristik (11) (112) vermittelte Projektion II. 132

Albrecht, R. Einige Ungleichungen für in einem Parallelstreifen holomorphe Funktionen 146

Weier, J. Zur Topologie der Abbildungen dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten. 163

Prachar, K. Über die kleinste quadratfreie Zahl einer arithmetischen Reihe. 173

Buchbesprechungen 177

Ein allgemeines Extremalproblem für konvexe Körper

Von

D. Ohmann, Milano

(Eingegangen am 13. Juni 1957)

Das Extremalproblem, unter allen konvexen Körpern K des n-dimensionalen euklidischen Raumes, die mit dem festen konvexen Körper K' positiven Volumens das vorgegebene gemischte Volumen $V(K'; K, \ldots, K)$ besitzen, denjenigen maximalen Volumens zu bestimmen, wird bekanntlich durch die Gleichheitsbedingung für die Minkowskische Ungleichung $V(K'; K, \ldots, K)^n \geq V(K')\, V(K)^{n-1}$ ($V(K)$ = Volumen von K) eindeutig gelöst. Demnach wird der Extremalkörper durch einen zu K' homothetischen konvexen Körper repräsentiert.

Die Voraussetzungen für dieses Extremalproblem lassen sich in drei Schritten erweitern: (a) An die Stelle des gemischten Volumens $V(K'; K, \ldots, K)$ tritt das noch näher zu beschreibende Oberflächenintegral $J(g; K)$ mit einer beliebigen richtungsabhängigen Funktion $g(\zeta)$. (b) Man faßt gleichzeitig die Oberflächenintegrale mit einer Anzahl $k \geq 1$ vorgegebener Funktionen $g_\varkappa(\zeta)$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$) ins Auge. (c) Die Oberflächenintegrale werden nicht alle fest vorgegeben, sondern unterliegen zum Teil lediglich bestimmten Ungleichheitsrelationen.

Im folgenden wird das Extremalproblem in dem eben umrissenen Umfang in Angriff genommen und bis auf die Beantwortung einer Existenzfrage auch vollständiger Lösung zugeführt. Das Kernstück des einfachen Beweises stellt dabei die oben angeführte Minkowskische Ungleichung. Ungeklärt bleibt jedoch die Frage, ob die Menge der jeweils zur Konkurrenz zuzulassenden Körper auch in jedem der Fälle, in denen das Extremalproblem einen Sinn besitzt, tatsächlich einen Körper der von uns in Betracht zu ziehenden Extremalkörperklasse enthält. Bei Einhaltung einschränkender Bedingungen (Stetigkeit und Positivität der beteiligten Funktionen und Fortfall der Erweiterung (c)) ist dies zu bejahen und kann durch Induktion bezüglich der Anzahl k der

Funktionen erwiesen werden. Im Interesse weitester Anwendungsmöglichkeiten ist jedoch auf die Einführung der genannten Einschränkungen verzichtet.

Die im Anschluß an das allgemeine Problem als Anwendungsbeispiele zu besprechenden speziellen Extremalprobleme bieten zumeist nichts völlig Neues, sondern stellen hauptsächlich Verallgemeinerungen schon bekannter Extremalprobleme dar. Es scheint jedoch, daß ihr Zusammenhang und damit auch die Möglichkeit einer gemeinsamen Lösungsmethode bisher nicht erkannt wurden.

§ 1. Das allgemeine Problem

Zunächst einige Definitionen: Das Oberflächenintegral $J(g; K)$ des konvexen Körpers K mit der auf die Richtung ζ bezogenen Funktion $g(\zeta)$ wird durch die Formel

$$J(g; K) = \int_K g(\zeta)\, dF \tag{1}$$

erklärt. Dabei bezeichnet ζ unter dem Integral die äußere Normalenrichtung des Flächenelements dF von K. Führt man hier noch die Voraussetzung ein, daß $g(\zeta)$ beschränkt ist, und daß das Integral (1) für die Einheitskugel existiert, so ist auch die Existenz aller Integrale (1) sichergestellt. Wir wollen $g(\zeta)$ dann kurz als *integrierbar* bezeichnen.

Ist $g(\zeta)$ mit der Stützfunktion $h(K'; \zeta)$ eines festen konvexen Körpers K' identisch, so bezeichnen wir das Oberflächenintegral auch einfach durch $J(K'; K)$. Damit ergibt sich die folgende Beziehung zu den Minkowskischen gemischten Volumina:

$$J(K'; K) = n\, V(K'; K, \ldots, K), \tag{2}$$

womit die eingangs erwähnte Minkowskische Ungleichung die Gestalt

$$J(K'; K)^n \geq n^n\, V(K')\, V(K)^{n-1} \tag{3}$$

gewinnt.

Der Funktion $g(\zeta)$ läßt sich eine weitere richtungsabhängige Funktion eindeutig durch die Festlegung $\underline{g}(\zeta) = \liminf g(\zeta')$ $(\zeta' \to \zeta)$ zuordnen, wobei ζ für den Moment festzuhalten ist, und ζ' beliebig variiert und auch mit ζ selbst zusammenfallen darf. Wir bezeichnen $\underline{g}(\zeta)$ als *Unterfunktion* zu $g(\zeta)$. Aus der Definition ergibt sich für konvergente Richtungsfolgen $\zeta_\mu (\mu = 1, 2, \ldots; \lim \zeta_\mu = \zeta)$ unmittelbar die Beziehung

$$\underline{g}(\zeta) \leq \liminf \underline{g}(\zeta_\mu) \quad (\zeta_\mu \to \zeta), \tag{4}$$

mit deren Hilfe unschwer festzustellen ist, daß die Unterfunktion $\bar{g}(\zeta)$ mit $g(\zeta)$ integrierbar ist.

Der Halbraum $H(g; \zeta)$ umfasse alle Punkte $\mathfrak{x}$, für die $\zeta\,\mathfrak{x} \leq g(\zeta)$ ausfällt. Dabei steht ζ auch für den Einheitsvektor der Richtung ζ, und es gibt $\mathfrak{x}$ gleichzeitig den zum Punkt $\mathfrak{x}$ hinweisenden Ortsvektor an, so daß $\zeta\,\mathfrak{x}$ als skalares Produkt anzusehen ist. Ist der Durchschnitt aller $H(g; \zeta)$ alsdann nicht leer, so stellt er einen konvexen Körper dar. Dieser wird als *Rumpfkörper* der Funktion $g(\zeta)$ mit R_g bezeichnet.

Mit diesen Definitionen gestattet das allgemeine Extremalproblem und dessen Lösung die folgende Formulierung:

Hauptsatz: *Bei Vorgabe der integrierbaren Funktionen $g_\varkappa(\zeta)$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$) und der festen Größen $c_\varkappa$ möge die Menge $\mathfrak{K}$ der konvexen Körper K positiven Volumens dadurch bestimmt sein, daß für alle $K \in \mathfrak{K}$ bei festem $\varkappa$ die gleiche der drei Relationen $J(g_\varkappa; K) \geq c_\varkappa$, $= c_\varkappa$ bzw. $\leq c_\varkappa$ gültig ist. Läßt sich den $c_\varkappa$ unter Einhaltung der Voraussetzung*

$$\lambda_\varkappa [J(g_\varkappa; K) - c_\varkappa] \leq 0 \qquad (K \in \mathfrak{K}) \tag{5}$$

jeweils ein festes Koeffizienten-k-Tupel $\lambda_\varkappa$ zuordnen, so daß der Rumpfkörper R_g der Linearkombination $g(\zeta) = \Sigma\, \lambda_\varkappa\, g_\varkappa(\zeta)$ den Bedingungen

$$\text{(a) } R_g \in \mathfrak{K}, \quad \text{(b) } J(g; R_g) = J(\bar{g}; R_g), \quad \text{(c) } \lambda_\varkappa [J(g_\varkappa; R_g) - c_\varkappa] = 0 \tag{6}$$

genügt, so besitzt R_g unter allen $\mathfrak{K}$ angehörenden Körpern maximales Volumen. Darüberhinaus kommt nur den zu R_g translationsgleichen[1] Körpern die Extremaleigenschaft zu.

Wir merken an, daß die Bedingungen (5) und (6c) durch die Zulassung von Ungleichheitsbeziehungen erforderlich werden. Die für stetige Funktionen trivialerweise erfüllte Bedingung (6b) muß bei Betrachtung unstetiger Funktionen hinzutreten; schon im Falle $k = 1$ ist leicht einzusehen, daß sie für die Existenz eines Extremalkörpers notwendig ist.

Zum Beweis erschließen wir mit Hilfe von (5) zunächst

$$\Sigma\, \lambda_\varkappa\, c_\varkappa \geq J(\bar{g}; K). \tag{7}$$

Weiter entnehmen wir den Definitionen die Beziehung

$$\bar{g}(\zeta) \geq h(R_g; \zeta), \tag{8}$$

aus der unmittelbar

$$J(\bar{g}; K) \geq J(R_g; K) \tag{9}$$

fließt. Bei Benutzung von (3) ergibt sich daher

[1] Zwei Körper mögen translationsgleich heißen, wenn sie durch eine geeignete Translation einer der Körper miteinander zur Deckung gebracht werden können.

$$(\Sigma \lambda_\varkappa c_\varkappa)^n \geq n^n V(R_g) V(K)^{n-1} \qquad (K \in \mathfrak{K}). \tag{10}$$

Um die Extremaleigenschaft von R_g zu erweisen, gilt es nun zu zeigen, daß in (10) dann und nur dann Gleichheit auftritt, wenn K und R_g translationsgleich sind. Da die Ungleichung (10) durch Kombination von (3), (7) und (9) entstanden ist, machen wir uns zunächst klar, daß in (7) und (9) unter dieser Voraussetzung Gleichheit besteht. In der Tat folgt dies für (7) wegen der Translationsinvarianz der Oberflächenintegrale sofort aus (6). Für (9) folgert man aus der Definition der Rumpfkörper mit Rücksicht auf Formel (4), daß in jedem Punkt des Randes von R_g eine äußere Normalenrichtung existiert, die der Menge ω der Richtungen ζ angehört, für die in (8) Gleichheit eintritt. Die Randpunkte mit äußeren Normalenrichtungen $\zeta \notin \omega$ sind mithin *singulär*, d. h. in ihnen besitzt R_g wenigstens zwei äußere Normalenvektoren. Nun kommt der Gesamtheit der singulären Randpunkte eines konvexen Körpers jedoch das Maß null zu. Daher gewinnt man aus (8) durch Integration über die Oberfläche von R_g die zu erweisende Beziehung $J(\bar{g}; R_g) = J(R_g; R_g)$, die ersichtlich auch für die mit R_g translationsgleichen Körper gültig ist. Da in der ebenfalls zur Herleitung von (10) verwendeten Minkowskischen Ungleichung (3) im Falle $V(K), V(K') > 0$ genau dann Gleichheit auftritt, wenn die Körper K und K' homothetisch sind, was hier wegen (6a) mit der Translationsgleichheit von K und R_g gleichbedeutend ist, ist der Beweis für die oben formulierte Gleichheitsbedingung der Ungleichung (10) damit abgeschlossen.

§ 2. Spezielle Probleme

Es ist zweckmäßig, hier noch einige allgemeine Vorbemerkungen Platz finden zu lassen.

Zunächst sei darauf hingewiesen, daß auch bei der Behandlung der folgenden Einzelprobleme im allgemeinen nicht auf die Existenzfrage für die Rumpfkörper eingegangen wird. Das bedeutet, daß die Entwicklungen an sich nur für die Fälle Gültigkeit haben, in denen die durch den Hauptsatz gegebenen Bedingungen tatsächlich erfüllt sind. Bei den meisten Beispielen wird jedoch leicht einzusehen sein, daß damit alle Möglichkeiten bis auf vereinzelte Grenzfälle erschöpft sind.

Werden die $g_\varkappa(\zeta)$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ durch die Stützfunktionen $h(K_\varkappa; \zeta)$ konvexer Körper $K_\varkappa$ repräsentiert, so lassen sich die Rumpfkörper als Minkowskische Linearkombinationen der $K_\varkappa$ selbst darstellen. In der Tat: definiert man die positive Linearkombination $\Sigma \lambda_\varkappa K_\varkappa$

($\lambda_\varkappa > 0$) und die Minkowskische Differenz $A - B \supset 0$ ($0 =$ leere Menge) der konvexen Körper $K_\varkappa$ bzw. A, B durch die Formeln

$$\text{(a)}\ h(\Sigma\lambda_\varkappa K_\varkappa; \zeta) = \Sigma\lambda_\varkappa h(K_\varkappa; \zeta)\ (\lambda_\varkappa > 0),$$

$$\text{(b)}\ h(A - B; \zeta) \leq h(A; \zeta) - h(B; \zeta), \tag{11}$$

wobei im Fall der Differenz hinzuzufügen ist, daß $A - B$ den umfassendsten Körper darstellt, für den eine solche Relation (11b) besteht, so ist der Konstruktion der Rumpfkörper sofort zu entnehmen, daß die Rumpfkörper von $\Sigma\lambda_\varkappa h(K_\varkappa; \zeta)$ ($\lambda_\varkappa > 0$) und $h(A; \zeta) - h(B; \zeta)$ mit $\Sigma\lambda_\varkappa K_\varkappa$ bzw. $A - B$ übereinstimmen. Bei beliebiger Linearkombination $h(\zeta) = \Sigma\lambda_\varkappa h(K_\varkappa; \zeta)$ ordnet man zu $h(\zeta) = \sum_{\lambda_\varkappa \geq 0} \lambda_\varkappa h(K_\varkappa; \zeta) - \sum_{\lambda_\varkappa < 0} |\lambda_\varkappa|\, h(K_\varkappa; \zeta)$ und erschließt nach Einführung des Symbols $< \Sigma\lambda_\varkappa K_\varkappa >$ für die geordnete Linearkombination $\sum_{\lambda_\varkappa \geq 0} \lambda_\varkappa K_\varkappa - \sum_{\lambda_\varkappa < 0} |\lambda_\varkappa|\, K_\varkappa$ die endgültige Formel

$$R_h = < \Sigma\lambda_\varkappa K_\varkappa >. \tag{12}$$

Um diesen Sachverhalt zur vereinfachten Konstruktion der Rumpfkörper zu nutzen, notieren wir für die Minkowskische Summe und Differenz noch die bekannten Darstellungen als Vereinigungsmenge und Durchschnitt

$$\text{(a)}\ A + B = \cup A^{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x} \in B),\quad \text{(b)}\ A - B = \cap A^{\mathfrak{x}}\ (\mathfrak{x} \in \overline{B}). \tag{13}$$

Hier ist $A^{\mathfrak{x}}$ aus A durch Verschiebung um den Vektor $\mathfrak{x}$ hervorgegangen, und $\overline{B}$ aus B durch Spiegelung am Ursprung gewonnen.

Um den speziellen Problemen hinreichende Allgemeinheit und zudem einen gemeinsamen Rahmen zu geben, lassen wir sie der Minkowskischen Relativgeometrie angehören. Wir legen dabei einen konvexen Eichkörper K_0 zugrunde, dessen Oberfläche wir als stetig gekrümmt voraussetzen wollen. Die zu K_0 homothetischen Körper werden als R-Kugeln ($R =$ Relativ) angesprochen; ihr R-Radius wird durch das Ähnlichkeitsverhältnis zu K_0 gegeben. Wir bestimmen noch einen beliebigen, aber von nun an festzuhaltenden Punkt des Inneren des Eichkörpers zu dessen R-Mittelpunkt; allgemein werden die Punkte, die eine ähnliche Lage im Innern einer R-Kugel einnehmen, als deren R-Mittelpunkt bezeichnet. Weiter führen wir für das Oberflächenintegral $J(K_0; K)$ auch die Bezeichnung R-Oberfläche mit dem Symbol F^* ein. Es ist schließlich zu bemerken, daß im folgenden alle Stücke die sich auf den

Eichkörper K_0 beziehen, durch einen unteren Index null gekennzeichnet werden.

A. In dieser ersten Gruppe von speziellen Extremalproblemen seien zur R-Oberfläche Linearkombinationen von Quermaßen vorgegeben. Das Quermaß $Q(K; \eta)$ gibt dabei das $(n-1)$-dimensionale Volumen der Orthogonalprojektion von K in der Richtung η wieder. Wegen der unmittelbar einzusehenden Beziehung $Q(K; \eta) = J(E_\eta; K)$ (E_η = Einheitsstrecke der Richtung η) haben wir hier Spezialfälle unseres allgemeinen Problems vor uns.

1. Es seien F^* und $Q(\eta)$ bei festem η vorgegeben[2]. Nach dem Hauptsatz und unter Beachtung von (12) kommen als Körper maximalen Volumens die Minkowskischen Linearkombinationen $< \lambda_1 K_0 + \lambda_2 E_\eta >$ in Betracht. Da diese bei $\lambda_1 \leq 0$ nicht existieren bzw. verschwindendes Volumen besitzen, darf $\lambda_1 > 0$ vorausgesetzt werden. Daher bleiben die Fälle (a) $\lambda_2 > 0$, (b) $\lambda_2 = 0$, (c) $\lambda_2 < 0$ zu unterscheiden. Wie man aus (13) folgert, ergibt sich als Extremalkörper im Falle (a) die Vereinigungsmenge aller R-Kugeln des R-Radius λ_1, deren R-Mittelpunkte auf der Strecke $\lambda_2 E_\eta$ liegen, im Falle (b) eine R-Kugel des R-Radius λ_1 und schließlich im Falle (c) der Durchschnitt zweier R-Kugeln des R-Radius λ_1, deren R-Mittelpunkte mit den Endpunkten der Strecke $\lambda_2 E_\eta$ zusammenfallen. Diese drei Fallunterscheidungen entsprechen ersichtlich den Möglichkeiten

$$\frac{F^*}{Q(\eta)} \gtreqless \frac{F_0^*}{Q_0(\eta)}$$

Mit der vorliegenden Aufgabe sind in der Ebene für den Fall, daß der Eichbereich durch den Einheitskreis dargestellt wird, gleichzeitig die Probleme gelöst, die Bereiche maximalen Inhalts unter den konvexen Bereichen zu bestimmen, die bei festem Umfang noch vorgegebene Dicke (Fall (a)) bzw. vorgegebenen Durchmesser (Fall (c)) besitzen[3].

---

[2] Für den speziellen Fall, daß der Eichkörper mit der Einheitskugel übereinstimmt, ist die Lösung des Problems bekannt. Hiefür liegen z. B. Arbeiten von *E. Schmidt* und *A. Dinghas* vor:

E. Schmidt, Über eine neue Methode zur Behandlung einer Klasse isoperimetrischer Aufgaben im Großen. Math. Z. 47, 489—642 (1942).

A. Dinghas, Über eine isoperimetrische Aufgabe von Erhard Schmidt, Math. Ztschr. 49, 734—792 (1944).

[3] Diese Probleme wurden schon von *T. Kubota* gelöst: *T. Kubota*, Einige Ungleichheitsbeziehungen über Eilinien und Eiflächen. Sci. Rep. Tohoku Univ. 12, 45—65 (1923).

2. Die R-Oberfläche F^* und die Quermaß-Linearkombination $\Sigma\, \alpha_\nu\, Q(\eta_\nu)(\alpha_\nu > 0)$ seien vorgegeben. Dabei mögen die Richtungen $\eta_\nu\,(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ ein orthogonales n-Tupel bilden. Nun ist $\Sigma\, \alpha_\nu\, Q(K; \eta_\nu) = J(P; K)\ (P = \Sigma\, \alpha_\nu\, E_{\eta_\nu})$, wobei P das nach den Richtungen η_ν orientierte Parallelotop der Kantenlängen α_ν darstellt. Mithin ergeben sich als Extremalkörper die Minkowskischen Linearkombinationen $< \lambda_1 K_0 + \lambda_2 P >$. Wir haben hier die Fallunterscheidungen

$$\text{(a) } \lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0;\quad \text{(b) } \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 > 0;\quad \text{(c) } \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0;$$
$$\text{(d) } \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 = 0;\quad \text{(e) } \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0 \qquad (14)$$

zu treffen und erhalten demgemäß die folgenden Extremalkörper: (a) das mit P gleichorientierte Parallelotop mit den Kantenlängen $\lambda_2\, \alpha_\nu - \lambda_1\, b_0(\eta_\nu)$ ($b_0(\eta_\nu)$ = Breite von K_0 in der Richtung η_ν); (b) das zu P homothetische Parallelotop der Kantenlängen $\lambda_2\, \alpha_\nu$; (c) die Vereinigungsmenge aller R-Kugeln des R-Radius λ_1, deren R-Mittelpunkte auf dem Parallelotop $\lambda_2\, P$ liegen; (d) die R-Kugel des R-Radius λ_1; (e) den Durchschnitt der 2^n R-Kugeln des R-Radius λ_1, deren R-Mittelpunkte mit den Ecken des Parallelotops $\lambda_2\, P$ zusammenfallen. Nachdem man den Quotienten $q = \dfrac{F^*}{\Sigma\, \alpha_\nu\, Q(\eta_\nu)}$ eingeführt und die Beziehung $q(P) \geq q(K_0)$ mit Hilfe der Minkowskischen Ungleichung (3) erschlossen hat, lassen sich die Fälle (a) bis (e) leicht den folgenden Möglichkeiten zuordnen:

$$\text{(a) } q > q(P);\ \text{(b) } q = q(P);\quad \text{(c) } q(P) > q > q(K_0),\quad \text{(d) } q = q(K_0;)$$
$$\text{(e) } q < q(K_0).$$

Es sei dazu angemerkt, daß dieses Beispiel mit seinen Fallunterscheidungen als typisch für den allgemeinen Fall anzusehen ist, daß die Oberflächenintegrale mit zwei verschiedenen konvexen Körpern positiven Volumens vorgegeben sind.

3. Es mögen schließlich die einzelnen Quermaße $Q(\eta_\nu)$ bei linear unabhängigem n-Tupel η_ν vorgegeben sein. Als Extremalkörper erscheinen die Linearkombinationen $\Sigma\, \lambda_\nu\, E_{\eta_\nu}$, bei denen ersichtlich alle $\lambda_\nu > 0$ vorauszusetzen sind, womit sich die Extremalkörper als Parallelotope ergeben, die nach den Richtungen η_ν orientiert sind.

B. Bezeichnet ω eine Untermenge der Einheitskugelfläche, und wird eine Funktion durch $g_\omega(\zeta) = \begin{cases} 1 (\zeta \in \omega) \\ 0 (\zeta \notin \omega) \end{cases}$ festgelegt, so lassen sich bei spezieller Wahl von ω durch die Vorgabe von $J(g_\omega; K)$ unterschiedliche

Bedingungen für die Krümmungsverhältnisse des Randes von K gewinnen. Wir geben hierfür einige Beispiele.

1. F^* sei vorgegeben; zudem möge jeder Randpunkt singulär sein, in dem eine Stütznormalenrichtung $\zeta \in \omega$ bei fester Menge ω existiert[4]. ω sei offen und enthalte keine offene Halbkugelfläche. Man kann sodann die Bedingung $J(g_\omega; K) \leq 0$ einführen. Damit kommen die Rumpfkörper der Linearkombinationen $g(\zeta) = \lambda_1 h_0(\zeta) + \lambda_2 g_\omega(\zeta)$ als Extremalkörper in Frage. Diese existieren nur für $\lambda_1 > 0$; weiter muß nach dem Hauptsatz aber auch $\lambda_2 > 0$ sein. Bei hinreichend großem λ_2 stellen die R_g Tangentialkörper der R-Kugeln $\lambda_1 K_0$ dar. Man erhält diese jeweils als Durchschnitt aller Halbräume, die von den Stützebenen an $\lambda_1 K_0$ begrenzt werden, deren Stützenormalenrichtungen der Menge ω nicht angehören. Es ist leicht zu verifizieren, daß die so beschriebenen Tangentialkörper den Bedingungen des Hauptsatzes genügen und mithin die Körper maximalen Volumens darstellen.

2. Neben F^* seien Flachstellen der jeweiligen Mindestgröße F_μ bei fester äußerer Normalenrichtung η_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, m$) vorgeschrieben[5]. Die Mengen ω_μ werden hier mit den η_μ identifiziert; sodann wird $J(g_{\omega_\mu}; K) \geq F_\mu$ gesetzt. Damit bieten sich die Rumpfkörper der Linearkombinationen $\lambda_0 h_0(\zeta) + \Sigma \lambda_\mu g_{\omega_\mu}(\zeta)$ als Extremalkörper an. Zu deren Existenz muß $\lambda_1 > 0$ ausfallen; aus dem Hauptsatz folgt außerdem $\lambda_2 \leq 0$. Man erkennt, daß diese Rumpfkörper durch die Kalottenkörper der R-Kugeln $\lambda_0 K_0$ gebildet werden, die dadurch entstehen, daß man von $\lambda_0 K_0$ senkrecht zu den Richtungen η_μ Kalotten der jeweiligen Höhe λ_μ abschneidet. Die Kalotten dürfen sich dabei gegenseitig überschneiden, so daß in Grenzfällen auch Polyeder auftreten können. Setzt man nun voraus, daß der Menge der zur Konkurrenz zuzulassenden Körper ein Kalottenkörper angehört, dessen Flachstellen jeweils den Inhalt F_μ besitzen, so erfüllt dieser ersichtlich alle Bedingungen des Hauptsatzes und stellt damit den Körper maximalen Volumens dar.

3. Bei festem Einheitsvektor η umfasse ω_1 die offene bzw. ω_2 die abgeschlossene Halbkugel, für deren Normalenvektoren ζ die Beziehung

---

[4] Zum ersten Mal wurde dieses Problem in ähnlicher Formulierung von *A. Dinghas* behandelt:

A. Dinghas, Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichungen für konvexe Körper mit Ecken. Math. Ztschr. 47, 669—675 (1940).

[5] Im Fall der Identität von Eichkörper und Einheitskugel wurde dieses Problem von *H. Hadwiger* aufgeworfen und gelöst:

H. Hadwiger, Über konvexe Körper mit Flachstellen. Math. Ztschr. 52, 212—216 (1949).

$\zeta\,\eta > 0$ bzw. $\zeta\,\eta \geq 0$ erfüllt ist. Durch $J(g_{\omega_1}; K)$ bzw. $J(g_{\omega_2}; K)$ wird dann eine offene bzw. abgeschlossene Halbfläche des konvexen Körpers K vorgegeben. Bei Vorgabe von F^* und festem c_1, c_2 treffen wir nun nacheinander die Zusatzvoraussetzungen (a) $J(g_{\omega_1}; K) \leq c_1$ bzw. $J(g_{\omega_2}; K) \geq c_2$. Die Extremalkörper müssen dann von den Rumpfkörpern der Linearkombinationen

(a) $\lambda_1 h_0(\zeta) + \lambda_2 g_{\omega_1}(\zeta)$ $(\lambda_1, \lambda_2 > 0)$ bzw. (b) $\lambda_1 h_0(\zeta) - \lambda_2 g_{\omega_2}(\zeta)$ $(\lambda_1, \lambda_2 > 0)$

gestellt werden. Zu deren Beschreibung stelle K^η bzw. $K^{-\eta}$ die Vereinigungsmenge des Körpers K mit dem von ihm in der Richtung η bzw. $-\eta$ zu entwerfenden Projektionshalbzylinder dar. Sodann verifiziert man unschwer, daß diese Rumpfkörper R_1, R_2 sich in folgender Weise als Durchschnitt darstellen lassen: (Ω = Einheitskugel):

a) $R_1 = (\lambda_1 K_0)^\eta \cap (\lambda_1 K_0 + \lambda_2 \Omega)$ (b) $R_2 = \lambda_1 K_0 \cap (\lambda_1 K_0 - \lambda_2 \Omega)^{-\eta}$.

R_1 und R_2 erfüllen die Bedingung (6b) und geben daher in ihrer Klasse die Extremalkörper ab.

C. In der Ebene werden nun einige Probleme behandelt, die keine unmittelbare Übertragung auf den Raum zulassen. Es handelt sich dabei um die Verallgemeinerung von Problemen auf die R-Geometrie, die von *S. Fukasawa*[6] und *A. S. Besicovitch*[7] für den Fall aufgeworfen und gelöst wurden, daß der Eichbereich B_0 den Einheitskreis darstellt. So werden wir bei gegebenem R-Umfang verlangen, daß die betrachteten Bereiche B einem festen Dreieck D einbeschrieben sind (*Fukasawa*), bzw. daß für sie $B \subseteq B'$ oder $B \supseteq B'$ bei vorgegebenen konvexen Bereich B' besteht (*Besicovich*).

1. Die Bereiche B mögen den gleichen R-Umfang U^* besitzen und sich dem Dreieck D einbeschreiben lassen. Die zweite Bedingung ist äquivalent mit der Vorgabe von $J(D; B)$. Es folgt, daß die Minkowskischen Linearkombinationen $< \lambda_1 B_0 + \lambda_2 D >$ die Extremaleigenschaft besitzen müssen. Bei den nun wieder zu treffenden Fallunterscheidungen (14) ergeben sich daher die folgenden Extremalkörper: (a) und (b) das Dreieck D selbst; (c) Die Vereinigungsmenge aller R-Kreise des R-Radius λ_1, deren R-Mittelpunkte auf dem Dreieck $\lambda_2 D$ liegen; (d) der D einbeschriebene R-Kreis; (e) der Durchschnitt der drei R-Kreise des R-Radius λ_1, deren R-Mittelpunkte mit den Ecken des Spiegeldreiecks

[6] *S. Fukasawa*, Ein Maximumproblem über die Eilinien, welche in einem Dreieck eingeschrieben sind. Tohoku Math. J. 26, 118—124 (1926).

[7] *A. S. Besicovitch*, Variants of a Classical Isoperimetric Problem. Quart. J. Math., Oxford Ser. (2) 3, 42—49 (1952).

$\lambda_2 \overline{D}$ zusammenfallen. Man erkennt, daß die Fallunterscheidungen mit der Einteilung (a) bzw. (b) $U^* = U^*(D)$, (c) $U^*(D) > U^* > \varrho\, U_0^*$ ($\varrho = R$-Inkreisradius von D), (d) $U^* = \varrho\, U_0^*$, (e) $U^* < \varrho\, U_0^*$ korrespondieren.

2. Zur Bewältigung der zweiten Problemklasse benötigen wir einige allgemeine Hilfsbetrachtungen. Dazu seien A und B zwei konvexe Bereiche. Für solche gelten die gleich zu erweisenden Beziehungen:

$$\text{(a) } J(A; B) = J(B; A), \quad \text{(b) } J(A; B_1) \leq J(A; B_2) \ (B_1 \subseteq B_2) \tag{15}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{(a) } (A - B) + B = \cup\, B^{\mathfrak{x}} \ (B^{\mathfrak{x}} \subseteq A) \\ \text{(b) } A - (A - B) = \cap\, A^{\mathfrak{x}} \ (A^{\mathfrak{x}} \supseteq B) \end{array}\right\} \quad (A - B \supset 0) \tag{16}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{(a) } J(A - B; (A - B) + B) = J(A - B; A) \\ \text{(b) } J(A - B; A - (A - B)) = J(A - B; B) \end{array}\right\} \tag{17}$$

Durch (15) werden wegen (2) nur die bekannten Symmetrie- und Monotonie-Eigenschaften des gemischten Flächeninhalts wiedergegeben. Weiter lassen sich die Formeln (16) den Definitionen (13) entnehmen. Danach ist nämlich einerseits $(A - B) + B = \cup\, B^{\mathfrak{x}}$ mit $\mathfrak{x} \in A - B$, woraus auf $\mathfrak{x} \in A^{-\mathfrak{y}}$ für $-\mathfrak{y} \in \overline{B}$ bzw. $\mathfrak{y} \in B$ zu schließen ist. Es folgt $\mathfrak{x} + \mathfrak{y} \in A$ und mithin $B^{\mathfrak{x}} \subseteq A$. Andererseits hat man $A - (A - B) = \cap\, A^{\mathfrak{x}}$ unter der Voraussetzung $\mathfrak{x} \in \overline{A - B}$ bzw. $-\mathfrak{x} \in A - B$, woraus jedoch wie eben $B^{-\mathfrak{x}} \subseteq A$ bzw. $B \subseteq A^{\mathfrak{x}}$ folgt.

Zum Beweis von (17) erschließen wir mit Hilfe von (16) $(A - B) + B \subseteq A$ und $A - (A - B) \supseteq B$, merken die Formeln

$$\text{(a) } h((A - B) + B; \zeta) \leq h(A; \zeta), \quad \text{(b) } h(A - (A - B); \zeta) \geq h(B; \zeta) \tag{18}$$

an und folgern aus (11), daß hier für alle die Richtungen ζ Gleichheit auftritt, für die $h(A - B; \zeta) = h(A; \zeta) - h(B; \zeta)$ besteht. Nun erinnern wir uns an ein Ergebnis des § 1, nach dem alle Randpunkte von $A - B$ singulär sind, in denen äußere Normalenrichtungen auftreten, für die diese Relation nicht gilt. Da die Menge der singulären Randpunkte das Maß null besitzt, folgt (17) durch Integration der Beziehungen (18) über den Umfang von $A - B$ und Anwendung der Formel (14a).

Nun zu unseren beiden Extremalproblemen.

(a) Es bezeichne $\mathfrak{R}$ die Klasse von konvexen Bereichen B, für die $U^*(B) = U^*$ und $B \subset B'$ bei vorgegebenem U^* und festem konvexen Bereich B' besteht. Für $U^* \leq \varrho_1\, U_0^*$ ($\varrho_1 = R$-Inkreisradius von B') stellt ersichtlich ein R-Kreis des R-Radius $\varrho = \dfrac{U^*}{U_0^*} \leq \varrho_1$ den Extremal-

bereich der Klasse $\mathfrak{K}$ dar. Bei $U^*(B') > U^* > U_0^*$ setzt man $B_\varrho = B' - \varrho\, B_0\, (\varrho < \varrho_1)$ und $C_\varrho = B_\varrho + \varrho\, B_0$. Nach (16a) ist $C_\varrho = \cup\, (\varrho\, B_0)^\mathfrak{x}\, ((\varrho\, B_0)^\mathfrak{x} \subset B')$; mit von 0 gegen ϱ_1 zunehmendem ϱ nimmt C_ϱ daher von B' gegen den R-Inkreis von B' ab. ϱ läßt sich mithin durch $U^*(C_\varrho) = U^*$ bestimmen, womit $C_\varrho \in \mathfrak{K}$ gilt. Wir fassen nun die Klasse $\mathfrak{K}'$ der Bereiche B ins Auge, für die $U^*(B) = U^*$ und $J(B_\varrho; B) \leq J(B_\varrho; B')$ ausfällt. Wegen (15b) ist $\mathfrak{K}' \supset \mathfrak{K}$. Da für C_ϱ nach (17a) $J(B_\varrho; C_\varrho) = J(B_\varrho; B')$ besteht, kommt C_ϱ dem Hauptsatz gemäß die Extremaleigenschaft in der Klasse $\mathfrak{K}'$ und erst recht in der Klasse $\mathfrak{K}$ selbst zu. C_ϱ läßt sich kurz als Vereinigungsmenge aller R-Kreise geeigneten R-Radius $\varrho < \varrho_1$ beschreiben, die auf B' Platz haben.

(b) Die Klasse $\mathfrak{K}$ umfasse nun alle konvexen Bereiche B, für die $U^*(B) = U^*$ und $B \supset B'$ gilt. Für $U^* \geq \varrho_2\, U_0^*$ ($\varrho_2 = R$-Umkreis-Radius von B') besitzt jeder B' enthaltende R-Kreis des R-Radius $\varrho = \dfrac{U^*}{U_0^*}$ die Extremaleigenschaft. Ist $U^*(B') < U^* < \varrho_2\, U_0^*$, so schreiben wir hier $B_\varrho = \varrho\, B_0 - B'\ (\varrho > \varrho_2)$ und $C_\varrho = \varrho\, B_0 - B_\varrho$. Gemäß (16b) folgt daraus $C_\varrho = \cap\, (\varrho\, B_0)^\mathfrak{x}\ ((\varrho\, B_0)^\mathfrak{x} \supset B')$. Nun stellt einerseits C_{ϱ_2} den R-Umkreis von B' dar; andererseits kann B' wegen der stetigen Krümmung des Randes von B_0 bei hinreichend großem ϱ beliebig genau durch die Bereiche $C_\varrho \supseteq B'$ approximiert werden. Aus Stetigkeitsgründen ist ϱ daher wieder so bestimmbar, daß $U^*(C_\varrho) = U^*$ und $C_\varrho \in \mathfrak{K}$ besteht. Die Klasse $\mathfrak{K}'$ der Bereiche B, für die $U^*(B) = U^*$ und $J(B_\varrho; B) \geq J(B_\varrho; B')$ statthat, umfaßt wegen (15b) auch hier wieder die Klasse $\mathfrak{K}$. Da mit Rücksicht auf (17b) $J(B_\varrho; C_\varrho) = J(B_\varrho; B')$ gilt, stellt C_ϱ nach dem Hauptsatz den Extremalkörper für die Klassen $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}'$ dar. Wir beschreiben C_ϱ als Durchschnitt aller B' enthaltenden R-Kreise geeigneten R-Radius $\varrho > \varrho_2$.

Finite Summation Formulas and Congruences for Legendre and Jacobi Polynomials

By

W. A. Al-Salam and **L. Carlitz**, Duke University, Durham, N. C., USA

(Received June 17, 1957)

1. Introduction. In previous papers [1], [2], the writers have obtained a number of finite summation formulas and congruences for the classical orthogonal polynomials. These results were suggested, to begin with, by familiar integral formulas, for example by the Laplace integral for the Legendre polynomials, which has the finite analog

$$\frac{1}{t}\sum_{s=0}^{t-1}\left\{x+(x^2-1)^{1/2}\cos\frac{2s\pi}{t}\right\}^n = P_n(x)+\sum_{0<tk\le n}\frac{n!}{(n+kt)!}P_n^{kt}(x),$$

where $P_n^{kt}(x)$ is the associated Legendre functions. The case $n<t$ is due to *Good* [6].

In the present paper we derive some additional results of a similar nature. For example corresponding to *Catalan*'s formula [5]

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{x(1+\cos\Phi)+i\sin\Phi\}^n\,d\Phi = P_n(x),$$

we get the finite analog

$$\frac{1}{t}\sum_{s=0}^{t-1}\left\{x(1+\cos\frac{2s\pi}{t})+i\sin\frac{2s\pi}{t}\right\}^n =$$

$$= P_n(x)+\sum_{0<tk\le n}\frac{n!}{(n+kt)!}\left\{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}k}+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}k}\right\}P_n^{kt}(x),$$

and the congruence

$$2^{-n}\sum_{s=1}^{p-1}\{2x+s(x+1)+s^{-1}(x-1)\}^n \equiv -P_n(x)$$

$$-\sum_{0<n+2wk\le n}\frac{n!}{(n+2wk)!}\left\{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{wk}+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{wk}\right\}P_n^{2wk}(x) \pmod p,$$

where $p=2w+1$, an arbitrary odd prime.

In the next place, expanding

$$(1 + x\,e^{i\Phi})^{\mu}\,(1 + x\,e^{-i\Phi})^{\nu}$$

we obtain analogous results involving the Jacobi polynomials. Finally we employ the expansion of

$$(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^n$$

to obtain results of a similar nature for certain polynomials in several variables.

2. Let us first consider the expression

$$\{x(1 + \cos\Phi) + i\sin\Phi\}^n.$$

Since

$$2\{x(1 + \cos\Phi) + i\sin\Phi\} = 2x + (x+1)\,e^{i\Phi} + (x-1)\,e^{-i\Phi},$$

we see easily that

$$2^n\{x(1 + \cos\Phi) + i\sin\Phi\}^n = \sum_{r+s\le n} \frac{n!\,(2x)^{n-r-s}}{r!\,s!\,(n-r-s)!}\,(x+1)^r \cdot (x-1)^s\,e^{(r-r)\Phi i} =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} \binom{n}{k}(x+1)^k\,e^{k\Phi i}\,2^{n-k} \sum_s \frac{\left(\frac{-n+k}{2}\right)_s \left(\frac{-n+k+1}{2}\right)_s}{s!\,(k+1)_s}\,(x^2-1)^s\,x^{n-k-2s}.$$

But

$$P_n^r(x) = (x^2-1)^{\frac{1}{2}r}\,\frac{(n+r)!}{2^r\,r!\,(n-r)!} \cdot \sum_s \frac{\left(\frac{-n+r}{2}\right)_s \left(\frac{-n+r+1}{2}\right)_s}{s!\,(r+1)_s}\,x^{n-2s-r}(x^2-1)^s \tag{2.1}$$

where $P_n^r(x)$ is the associated Legendre polynomial. Hence we obtain the expansion

$$\{x(1+\cos\Phi)+i\sin\Phi\}^n =$$

$$P_n(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n+k)!}\left\{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}k} + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}k}\right\} P_n^k(x)\cos k\Phi$$

$$+ i\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n+k)!}\left\{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}k} - \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}k}\right\} P_n^k(x)\sin k\Phi. \tag{2.2}$$

From (2.2) the following formulas are immediately obtained.

$$(2x)^n = P_n(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n+k)!} \left\{ \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}k} + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}k} \right\} P_n^k(x), \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{x(1+\cos\Phi) + i\sin\Phi\}^n \cos k\Phi \, d\Phi =$$

$$= \frac{n!}{(n+k)!} \left\{ \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}k} + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}k} \right\} P_n^k(x), \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{x(1+\cos\Phi) + i\sin\Phi\}^n \sin k\Phi \, d\Phi =$$

$$= i \frac{n!}{(n+k)!} \left\{ \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}k} - \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}k} \right\} P_n^k(x). \tag{2.5}$$

3. The formula (2.2) is equivalent to the familiar identity

$$\{x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\Phi\}^n = P_n(x) + 2\sum_{r=1}^{n} \frac{n!}{(n+r)!} P_n^r(x) \cos r\Phi, \tag{3.1}$$

as we shall now indicate. If we make the substitution

$$x = i\cot\theta, \quad (x^2-1)^{\frac{1}{2}} = i\csc\theta, \tag{3.2}$$

then

$$x(1+\cos\Phi) + i\sin\Phi = x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}}(\cos\Phi\cos\theta + \sin\Phi\sin\theta) =$$

$$= x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\Phi-\theta).$$

Thus, using (3.1), we get

$$\{x(1+\cos\Phi) + i\sin\Phi\}^n = \{x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\Phi-\theta)\}^n =$$

$$= P_n(x) + 2\sum_{r=1}^{n} \frac{n!}{(n+r)!} P_n^r(x)(\cos r\Phi\cos r\theta + \sin r\Phi\sin r\theta). \tag{3.3}$$

Now it follows easily from (3.2) that

$$\frac{x-1}{x+1} = e^{2i\theta}, \quad \frac{x+1}{x-1} = e^{-2i\theta},$$

so that

$$\cos r\theta = \left\{ \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}r} + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}r} \right\},$$

$$\sin r\theta = \left\{ \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}r} - \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}r} \right\}.$$

Substituting these values in the right hand side of (3.3), it is evident that we obtain (2.2).

Similarly by means of the substitution (3.2), we may pass from (1.1) to (1.4).

4. Let us replace in (2.2) Φ by $\Phi + \frac{2s\pi}{t}$. Let us also recall the formula

$$\frac{1}{t}\sum_{s=0}^{t-1} \cos m(\Phi + \frac{2s\pi}{t}) = \begin{cases} 0 & (t \nmid m) \\ \cos m\Phi & (t \mid m). \end{cases} \quad (4.1)$$

Now if we sum both sides over s we get

$$\frac{1}{t}\sum_{s=0}^{t-1} \left\{x(1 + \cos(\Phi + \frac{2s\pi}{t})) + i \sin(\Phi + \frac{2s\pi}{t})\right\}^n = P_n(x) +$$

$$+ \sum_{0<tk\leq n} \frac{n!}{(n+tk)!} \left\{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}k} + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}k}\right\} P_n^{kt}(x) \cos kt\Phi +$$

$$+ i \sum_{0<kt\leq n} \frac{n!}{(n+kt)!} \left\{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}k} - \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}k}\right\} P_n^{kt}(x) \cos kt\Phi, \quad (4.2)$$

where t is an arbitrary positive integer, and Φ is an arbitrary complex number. In particular if $\Phi = 0$, we have

$$\frac{1}{t}\sum_{s=0}^{t-1} \left\{x(1 + \cos\frac{2s\pi}{t}) + i \sin\frac{2s\pi}{t}\right\}^n =$$

$$= P_n(x) + \sum_{0<kt\leq n} \frac{n!}{(n+kt)!} \left\{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}k} + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}k}\right\} P_n^{kt}(x). \quad (4.3)$$

On the other hand if $t > n$

$$\frac{1}{t}\sum_{s=0}^{t-1} \left\{x(1 + \cos(\Phi + \frac{2s\pi}{t})) + i \sin(\Phi + \frac{2s\pi}{t})\right\}^n = P_n(x). \quad (4.4)$$

A more general formula than (4.3) is

$$\frac{1}{t}\sum_{s=0}^{t-1} \left\{x(1 + \cos(\Phi + \frac{2s\pi}{t})) + i \sin(\Phi + \frac{2s\pi}{t})\right\}^n e^{ir(\Phi + \frac{2s\pi}{t})} =$$

$$= \lambda P_n(x)\, e^{ir\Phi} + \sum_{0<kt-r\leq n} \frac{n!}{(n+kt-r)!} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}(kt-r)} P_n^{kt-r}(x)\, e^{ikt\Phi} +$$

$$+ \sum_{0<kt+r\leq n} \frac{n!}{(n+kt+r)!} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}(kt+r)} P_n^{kt+r}(x)\, e^{ikt\Phi} \quad (4.5)$$

where λ is 1 or 0 according as $t \mid r$ or $t \nmid r$. If $r = 0$ we get (4.3). However if $0 < r \leq n$ and $t > n + r$ we get

$$\frac{1}{t}\sum_{s=0}^{t-1}\left\{x(1+\cos(\Phi+\frac{2s\pi}{t}))+i\sin(\Phi+\frac{2s\pi}{t})\right\}^n e^{in(\Phi+\frac{2s\pi}{t})}=$$

$$=\frac{n!}{(n+r)!}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}r}P_n^r(x). \tag{4.6}$$

If, further, $r=n$, we have

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^n=\frac{1}{t}\sum_{s=0}^{t-1}\left\{x(1+\cos(\Phi+\frac{2s\pi}{t}))+i\sin(\Phi+\frac{2s\pi}{t})\right\}^n e^{in(\Phi+\frac{2s\pi}{t})}. \tag{4.7}$$

5. Now let us replace in (2.2) $\cos\Phi$ by $\frac{1}{2}(s+s^{-1})$, s being a positive integer. We can verify easily that with this transformation $\sin\Phi$ corresponds to $\dfrac{1}{2i}(s-s^{-1})$ and $\cos k\Phi$ to $\frac{1}{2}(s^k+s^{-k})$. Let us also recall the familiar congruence

$$\sum_{s=1}^{p-1}s^k\equiv\begin{cases}0\pmod p & (p-1\nmid k)\\ -1\pmod p & (p-1\mid k),\end{cases} \tag{5.1}$$

where p is a prime.

Hence we see that if $p=2w+1$

$$2^{-n}\sum_{s=1}^{p-1}\{2x+s(x+1)+s^{-1}(x-1)\}^n\equiv -P_n(x)-$$

$$-\sum_{0<n+2wk\le n}\frac{n!}{(n+2wk)!}\left\{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2wk}+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2wk}\right\}P_n^{2wk}(x)\pmod p. \tag{5.2}$$

In particular if $p>n+1$ we have

$$2^{-n}\sum_{s=1}^{p-1}\{2x+s(x+1)+s^{-1}(x-1)\}^n\equiv -P_n(x)\pmod p. \tag{5.3}$$

A formula more general than (5.2) can be obtained by multiplying by s^r before summing. We have

$$2^{-n}\sum_{s=1}^{p-1}\{2x+s(x+1)+s^{-1}(x-1)\}^n s^r\equiv\lambda P_n(x)$$

$$-\sum_{0<2wt-r\le n}\frac{n!}{(2wt-r+n)!}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2wt-r}P_n^{2wt-r}(x)-$$

$$-\sum_{0<2wt+r\le n}\frac{n!}{(2wt+r+n)!}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2wt+r}P_n^{2wt+r}(x)\pmod p \tag{5.4}$$

where $\lambda=-1$ or 0 according as $p-1\mid r$ or not.

In particular for $r = w$, (5.4) becomes

$$2^{-n} \sum_{s=1}^{p-1} \left(\frac{s}{p}\right) \{2x + s(x+1) + s^{-1}(x-1)\}^n$$

$$\equiv - \sum_{\substack{0<tw\leq n \\ t \text{ odd}}} \frac{n!}{(n+tw)!} \left\{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{tw} + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{tw}\right\} P_n^{tw}(x) \pmod p, \qquad (5.5)$$

where (s/p) is the Legendre symbol.

6. Let us consider

$$(1 + x e^{i\Phi})^\mu \; (1 + x e^{-i\Phi})^\nu.$$

If we expand by the binomial theorem, we get

$$(1 + x e^{i\Phi})^\mu (1 + x e^{-i\Phi})^\nu = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mu}{k} \binom{\nu}{s} x^{k+s} e^{i(k-s)\Phi} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\Phi} \sum_{k-s=m} \binom{\mu}{k} \binom{\nu}{s} x^{k+s}.$$

In the hypergeometric notation this is

$$(1 + xe^{i\Phi})^\mu (1 + xe^{-i\Phi})^\nu = \sum_{m=0}^{\infty} e^{im\Phi} x^m \binom{\mu}{m} {}_2F_1[-\nu, -\mu + m, 1 + m, x^2]$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} e^{-im\Phi} x^m \binom{\nu}{m} {}_2F_1[-\mu, -\nu + m, 1 + m, x^2]. \qquad (6.1)$$

In particular let $\mu = n + \alpha$ and $\nu = n + \beta$, where n is a non-negative integer such that $n + \alpha \geq 0$, $n + \beta \geq 0$. Then if we put x for $\dfrac{x^2+1}{1-x^2}$ (6.1) becomes

$$\{x + (x^2-1)^{1/2} \cos \Phi\}^n \left(1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/2} e^{i\Phi}\right)^\alpha \left(1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/2} e^{-i\Phi}\right)^\beta =$$

$$= \sum_{m=0}^{n+\alpha} e^{im\Phi} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/2 m} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{m-\alpha} P_{n+\alpha-m}^{(m,\, \beta-\alpha+m)}(x) +$$

$$+ \sum_{m=0}^{n+\beta} e^{-im\Phi} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/2 m} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{m-\beta} P_{n+\beta-m}^{(m,\, \alpha-\beta+m)}(x). \qquad (6.2)$$

From (6.2) the following formula is obtained:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{x + (x^2-1)^{1/2} \cos \Phi\}^n \left\{1 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/2} e^{i\Phi}\right\}^\alpha \left\{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/2} e^{i\Phi}\right\}^\beta d\Phi$$

$$= P_n^{(\alpha,\, \beta)}(x). \qquad (6.3)$$

This formula was first given by *Bateman* [4] in different notation and with a slightly inaccurate numerical coefficient. It is also given in [7, p. 292] in the form we have here.

Now from (6.1) we have

$$\frac{1}{t}\sum_{s=0}^{t-1}(1+xe^{i(\Phi+\frac{2s\pi}{t})})^{\mu}(1+xe^{-i(\Phi+\frac{2s\pi}{t})})^{\nu}e^{i(\Phi+\frac{2s\pi}{t})k}=$$

$$=\sum_{0\le tm-k}x^{tm-k}\binom{\mu}{tm-k}{}_2F_1[-\nu,-\mu+tm-k;1+tm-k;x^2]+$$

$$+\sum_{0\le tm+k}x^{tm+k}\binom{\nu}{tm+k}{}_2F_1[-\mu,-\nu+tm+k;1+tm+k;x^2]. \tag{6.4}$$

Similarly (6.2) gives

$$\frac{1}{t}\sum_{s=0}^{t-1}\left\{x+(x^2-1)^{1/2}\cos(\Phi+\frac{2s\pi}{t})\right\}^n\left\{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/2}e^{i\Phi(+\frac{2s\pi}{t})}\right\}^{\alpha}\cdot$$

$$\cdot\left\{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/2}e^{-i(\Phi+\frac{2s\pi}{t})}\right\}^{\beta}e^{i(\Phi+\frac{2s\pi}{t})\gamma}$$

$$=\sum_{0\le(m+\gamma)t\le n+\alpha}e^{i(tm-\gamma)\Phi}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}(tm-\gamma)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{tm-\gamma-\alpha}P_{n+\alpha-tm+\gamma}^{(tm-\gamma,\,\beta-\alpha+tm-\gamma)}(x)+$$

$$+\sum_{0\le(m-\gamma)t\le n+\beta}e^{i(tm+\gamma)\Phi}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}(tm+\gamma)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{tm+\gamma-\beta}P_{n+\beta-tm-\gamma}^{(tm+\gamma,\,\alpha-\beta+tm+\gamma)}(x). \tag{6.5}$$

In particular if $t>\max(n+\alpha,n+\beta)$, $\gamma=0$, $\Phi=0$, we have

$$\frac{1}{t}\sum_{s=0}^{t-1}\left\{x+(x^2-1)^{1/2}\cos\frac{2s\pi}{t}\right\}^n\left\{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/2}e^{\frac{2s\pi}{t}i}\right\}^{\alpha}$$

$$\left\{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/2}e^{\frac{2s\pi}{t}i}\right\}^{\beta}=P_n^{(\alpha,\beta)}(x). \tag{6.6}$$

Let us replace in (6.2) $e^{i\Phi}$ by s. We get, employing (5.1),

$$-\sum_{s=1}^{p-1}\{x+\tfrac{1}{2}(x^2-1)^{1/2}(s+s^{-1})\}^n\{1+(\frac{x-1}{x+1})^{1/2}s\}^{\alpha}\{1+(\frac{x-1}{x+1})^{1/2}s^{-1}\}^{\beta}s^{-k}$$

$$\equiv\sum_{0\le 2wt+k\le n+\alpha}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}(2wt+k)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2wt+k-\alpha}P_{n+\alpha-2wt-k}^{(2wt+k,\,\beta-\alpha+k+2wt)}(x)+$$

$$+\sum_{0\le 2wt-k\le n+\beta}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}(2wt-k)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2wt-k-\beta}P_{n+\beta-2wt+k}^{(2wt-k,\,\alpha-\beta+2wt-k)}(x)$$

$$\pmod p. \tag{6.7}$$

For $p > \max(n+\alpha+k+1,\ n+\beta+k+1)$ we get

$$-\sum_{s=1}^{p-1}\{x+\tfrac{1}{2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(s+s^{-1})\}^n\{1+s(\frac{x-1}{x+1})\}^\alpha\{1+s^{-1}(\frac{x-1}{x+1})\}^\beta s^{-k}$$

$$\equiv(\frac{x-1}{x+1})^{\frac{1}{2}k}(\frac{x+1}{2})^{k-\alpha}P_{n+\alpha-k}^{(k,\beta-\alpha+k)}(x) \pmod p \qquad (6.8)$$

which for $k=\alpha$ reduces to

$$-\sum_{s=1}^{p-1}\{x+\tfrac{1}{2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(s+s^{-1})\}^n\{1+s(\frac{x+1}{x-1})\}^\alpha\{1+s(\frac{x-1}{x+1})\}^\beta \equiv$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \pmod p. \qquad (6.9)$$

As in § 5, if in (6.7) or (6.8) we take $w=k$, where $p=2w+1$, we get sums involving the Legendre symbol. In particular, (6.7) yields

$$-\sum_{s=1}^{p-1}(\frac{s}{p})\{x+\tfrac{1}{2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(s+s^{-1})\}^n\{1+s(\frac{x-1}{x+1})^{\frac{1}{2}}\}^\alpha\{1+s^{-1}(\frac{x-1}{x+1})^{\frac{1}{2}}\}^\beta$$

$$\equiv\sum_{0\le wt\le n+\alpha}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}wt}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{wt-\alpha}P_{n+\alpha-wt}^{(wt,\beta-\alpha+wt)}(x)+$$

$$+\sum_{0\le wt\le n+\beta}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}wt}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{wt-\beta}P_{n+\beta-wt}^{(wt,\alpha-\beta+wt)}(x) \pmod p, \qquad (6.10)$$

where now t is restricted to odd values.

7. Consider the expansion (compare [1, § 4])

$$(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^n = \qquad (7.1)$$

$$=\sum_{r+s+t=n}\frac{n!}{r!\,s!\,t!}x^r y^s z^t\cos^r\alpha\cos^s\beta\cos^t\gamma.$$

Since

$$2^r\cos^r\alpha=\sum_{h=0}^{r}\binom{r}{h}\cos(r-2h)\alpha,$$

we get that the right hand side of (7.1) is

$$2^{-n}\sum_{r+s+t=n}\frac{n!}{r!\,s!\,t!}x^r y^s z^t\sum_{h,j,k}\binom{r}{h}\binom{s}{j}\binom{t}{k}\cos(r-2h)\alpha\,.$$

$$.\ \cos(s-2j)\beta\cos(t-2k)\gamma.$$

Put

$$u=r-2h,\ v=s-2j,\ w=t-2k,$$

so that

$$u+v+w=n-2h-2j-2k\equiv n \pmod 2;$$

then the above multiple sum reduces to

$$2^{-n} \sum_{\substack{u+v+w\le n \\ u+v+w\,-\,n \pmod 2}} \varepsilon_u \varepsilon_v \varepsilon_w x^u y^v z^w \cos u\alpha \cos v\beta \cos w\gamma \cdot$$

$$\cdot \sum_{h+j+k=m} \frac{n!}{h!\, j!\, k!\, (u+h)!\, (v+j)!\, (w+k)!} x^{2h} y^{2j} z^{2k}$$

where the outer sum is over all non-negative u, v, w which satisfy the indicated conditions, $\varepsilon_u = 1$ for $u = 0$ and 2 for $u \ge 1$, and

$$m = \tfrac{1}{2}(n - u - v - w). \tag{7.2}$$

Therefore, if we put

$$P_m^{(u,v,w)}(x, y, z) \tag{7.3}$$

$$= \sum_{h+j+k=m} \frac{(2m + u + v + w)!}{h!\, j!\, k!\, (h+u)!\, (j+v)!\, (k+w)!} x^h y^j z^k,$$

we have the identity

$$(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^n \tag{7.4}$$

$$= 2^{-n} \sum_{\substack{u+v+w\le n \\ u+v+w\equiv n \pmod 2}} \varepsilon_u \varepsilon_v \varepsilon_w \cos u\alpha \cos v\beta \cos w\gamma\, x^u y^v z^w \cdot P_m^{(u,v,w)}(x^2, y^2, z^2).$$

If we recall the definition of *Appell*'s function [3]

$$F_4[\alpha, \beta; \gamma, \gamma'; y, z] = \sum_{j,k} \frac{(\alpha)_{j+k} (\beta)_{j+k}}{j!\, k!\, (\gamma)_j (\gamma')_k} y^j z^k,$$

then it is easily verified that

$$P_m^{(u,v,w)}(x, y, z) = \frac{(2m+u+v+w)!}{m!\, (m+u)!\, v!\, w!} x^{2m} F_4\left[-m, -m-u,; v+1, w+1; \frac{y^2}{x^2}, \frac{z^2}{x^2}\right] \tag{7.5}$$

Note that *Appell* [3, p. 316] has defined certain polynomials in two variables in term of the function F_2.

Exactly as in the proof of (7.4) we can also show that

$$(x+y\cos\beta+z\cos\gamma)^n = \sum_{v+w=n} \varepsilon_v \varepsilon_w 2^{-v-w} \frac{n!}{v!\, w!\, (n-v-w)!} x^{n-v-w} y^v z^w$$

$$F_4\left[-\frac{n-v-w+1}{2}, -\frac{n-v-w-1}{2}; v+1, w+1; \frac{y^2}{x^2}, \frac{z^2}{x^2}\right]. \tag{7.6}$$

It is clear how (7.4) and (7.6) can be extended to an arbitrary number of variables.

8. By means of (7.4) a variety of results can be obtained. In the first place

$$(2\pi)^{-3} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^n \cos p\alpha \,.$$

$$. \cos q\beta \cos r\gamma \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma = 2^{-n} x^p y^q z^r P^{(p,q,r)}_{\frac{1}{2}(n-p-q-r)}(x^2, y^2, z^2) \qquad (8.1)$$

for $p + q + r \equiv n \pmod 2$; when this condition is not satisfied, the integral vanishes. In particular, for $p = q = r = 0$, (8.1) becomes

$$(2\pi)^{-3} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^{2n} \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma =$$

$$= 2^{-n} P_n^{(0,0,0)}(x^2, y^2, z^2), \qquad (8.2)$$

where by (7.5)

$$P_n^{(0,0,0)}(x^2, y^2, z^2) = \binom{2n}{n} x^{2n} \sum_{j,k} \left(\frac{n!}{j!\,k!\,(n-j-k)!}\right)^2 \left(\frac{y}{x}\right)^{2j} \left(\frac{z}{x}\right)^{2k}. \qquad (8.3)$$

In the next place we have the finite summation formula

$$\frac{1}{k_1 k_2 k_3} \sum_{s_1=1}^{k_1} \sum_{s_2=1}^{k_2} \sum_{s_3=1}^{k_3} \left(x\cos\frac{2s_1\pi}{k_1} + y\cos\frac{2s_2\pi}{k_2} + z\cos\frac{2s_3\pi}{k_3}\right)^n =$$

$$= 2^{-n} \sum_{t_1,t_2,t_3} \varepsilon_{t_1}\varepsilon_{t_2}\varepsilon_{t_3} x^{t_1 k_1} y^{t_2 k_2} z^{t_3 k_3} P_m^{(t_1 k_1, t_2 k_2, t_3 k_3)}(x^2, y^2, z^2) \qquad (8.4)$$

where k_1, k_2, k_3 are arbitrary positive integers and the summation extends over all non-negative t_1, t_2, t_3 such that

$$m = \tfrac{1}{2}(n - t_1 k_1 - t_2 k_2 - t_3 k_3)$$

is a non-negative integer. In particular for

$$2n < \min(k_1, k_2, k_3),$$

(8.4) reduces to

$$\frac{1}{k_1 k_2 k_3} \sum_{s_1=1}^{k_1} \sum_{s_2=1}^{k_2} \sum_{s_3=1}^{k_3} \left(x\cos\frac{2s_1\pi}{k_1} + y\cos\frac{2s_2\pi}{k_2} + z\cos\frac{2s_3\pi}{k_3}\right)^{2n} =$$

$$= 2^{-2n} P_n^{(0,0,0)}(x^2, y^2, z^2) \qquad (8.5)$$

where $P_n^{(0,0,0)}(x^2, y^2, z^2)$ is given by (8.3).

Now let $p = 2w + 1$ be an arbitrary odd prime. Then corresponding to (8.4) we have the following congruence:

$$-\sum_{s_1, s_2, s_3}^{p-1} \{x(s_1 + s_1^{-1}) + y(s_2 + s_2^{-1}) + z(s_3 + s_3^{-1})\}^{2n} \equiv$$

$$\equiv 2^{-2n} \sum_{t_1, t_2, t_3} \varepsilon_{t_1}\, \varepsilon_{t_2}\, \varepsilon_{t_3}\, z^{2t_3 w}\, x^{2t_1 w}\, y^{2t_2 w}\, P_{n-(t_1+t_2+t_3)w}^{(2t_1 w,\, 2t_2 w,\, 2t_3 w)}(x^2, y^2, z^2) \pmod p; \quad (8.6)$$

the summation extends over all non-negative t_1, t_2, t_3 such that $(t_1 + + t_2 + t_3)\, w \leq n$. In particular for $n < w$, (8.6) becomes

$$-\sum_{s_1, s_2, s_3}^{p-1} \{x(s_1 + s_1^{-1}) + y(s_2 + s_2^{-1}) + z(s_3 + s_3^{-1})\}^{2n} \equiv$$

$$\equiv 2^{-2n} P_n^{(0,0,0)}(x^2, y^2, z^2) \pmod p. \quad (8.7)$$

We may also mention the congruence

$$-\sum_{s_1, s_2, s_3 = 1} \left(\frac{s_1 s_2 s_3}{p}\right) \{x(s_1 + s_1^{-1}) + y(s_2 + s_2^{-1}) + z(s_3 + s_3^{-1})\}^n \equiv$$

$$\equiv 8 \sum_{t_1, t_2, t_3 \text{ odd}} x^{t_1 w}\, y^{t_2 w}\, z^{t_3 w} P_m^{(t_1 w,\, t_2 w,\, t_3 w)}(x^2, y^2, z^2) \pmod p, \quad (8.8)$$

where again (s/p) is the Legendre symbol, and the summation in the right is over odd positive t_1, t_2, t_3 such that

$$m = \tfrac{1}{2}(n - (t_1 + t_2 + t_3)\, w) \geq 0$$

and integral.

Similarly we may employ (7.6) to obtain results analogous to (8.4), ..., (8.8).

References

[1] *W. A. Al-Salam* and *L. Carlitz*, Some finite summation formulas for the classical orthogonal polynomials, Rendiconti di Matematica, vol. 16 (1957),

[2] *W. A. Al-Salam* and *L. Carlitz*, Congruence properties of the classical orthogonal polynomials, Duke Mathematical Journal, vol. 25 (1958).

[3] *P. Appell* and *J. Kampe de Ferriet*, Fonctions hypergéometrique et hypersphérique. Polynomes d'Hermite, Paris 1926.

[4] *H. Bateman*, A generalization of the Legendre polynomial, Proceedings of the London Mathematical Society, (2), vol 3 (1905), pp. 111—123.

[5] *E. Catalan*, Nouvelles propriétés des fonction X_n, Mémoire de l' Académie Royale des sciences, des lettres, et des beaux-arts de Belgique, vol. 47 (1889).

[6] *I. J. Good*, A new finite series for the Legendre polynomials, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 51 (1955) part 2, pp. 385—388.

[7] *G. Pólya* and *G. Szegö*, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, vol. 2, Berlin 1954.

Über die durch einen quadratischen Komplex der Charakteristik (11) (112) vermittelte Projektion I

Von

H. Brauner, Wien

(Eingegangen am 17. Juni 1957)

Eine Hauptaufgabe der konstruktiven Geometrie ist die Untersuchung der Abbildungen des dreidimensionalen euklidischen Punktraumes auf ein ebenes Punktfeld, wobei im Falle der gebräuchlichen Abbildungen die Zuordnung durch eine Mannigfaltigkeit „projizierender Strahlen" hergestellt wird. Diese Strahlmannigfaltigkeit, nach *L. Eckhart* „*Abbildungsmittel*" genannt, kann eine Strahlkongruenz oder ein Strahlkomplex sein. Im ersten Fall liegt eine Abbildung der Punkte des Raumes auf die Punkte oder gewisse Punktgruppen der Bildebene vor; Beispiele dieser Art sind die Zentral- und Parallelprojektion, die als Abbildungsmittel ein Strahlbündel verwenden, die Netzprojektion [1]—[6][1], bei der die projizierenden Strahlen ein Netz erfüllen, und die Projektion mittels der Sehnen einer Raumkurve 3. Ordnung [7], [8]. Von ganz anderer Art sind die Abbildungen, die als Abbildungsmittel einen Strahlkomplex verwenden; in diesem Fall werden die Punkte des Raumes auf ein System von i. a. ∞^3 Kurven der Ebene abgebildet, indem jedem Raumpunkt die Spur des von ihm ausstrahlenden Komplexkegels in der Bildebene zugeordnet wird. Für die zeichnerische Behandlung besonders geeignet sind naturgemäß solche Abbildungskomplexe, die *eine Abbildung der Punkte auf die Kreise der Bildebene* vermitteln; dies leisten spezielle quadratische Komplexe, die zwei Strahlbündel um die absoluten Punkte der Bildebene enthalten. Diese sogenannten „*zirkularen*" *quadratischen Komplexe* hat *L. Eckhart* [9] teilweise und *K. Strubecker* [10], [11] vollständig aufgestellt. In konstruktiver Hinsicht ist vor allem der Komplex aller Treffgeraden eines durch die absoluten Punkte der Bildebene gehenden Fernkreises untersucht

[1] Die Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß des zweiten Teiles.

worden. Dieser Komplex besitzt die Charakteristik (222) und führt im wesentlichen auf die *Zyklographie* [12]. Außerdem finden sich in der Literatur die konstruktiven Mechanismen eines *speziellen Hirstschen zirkularen Komplexes* von *W. Schmid* [13] behandelt vor.

Ziel dieser Note ist es, die *Komplexprojektion mittels eines zirkularen quadratischen Komplexes der Charakteristik* (11) (112) zu untersuchen, wozu der kürzlich vom Verfasser entdeckte Zusammenhang dieses Komplexes mit der Netzprojektion den Anstoß gab [14]. Es zeigt sich, daß sich diese Abbildung unter Zugrundelegung einer *quasielliptischen Metrik* als eine der Zyklographie analoge Abbildung deuten läßt.

Der erste Teil dieser Arbeit ist der Untersuchung des Abbildungsmittels gewidmet. Unter Verwendung der Netzprojektion werden seine linearen Automorphien untersucht und eine für das folgende wichtige kubische Automorphie besprochen. Dabei ergibt sich Gelegenheit, einer Reihe der von *K. Strubecker* in seiner Transformationstheorie der Komplexe (11) (112) [15] gefundenen Ergebnisse eine direkte, anschaulich-geometrische Deutung zu geben. Dies wird besonders durch Einführung einer quasielliptischen Metrik ermöglicht. Während *F. Hohenberg* [5] die Netzprojektion als Parallelprojektion im elliptischen Raum erkannt hat, wird hier eine metrische Deutung der Netzprojektion im Rahmen der quasielliptischen Geometrie angedeutet.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wird die „*Komplexprojektion*" selbst genauer untersucht, insbesondere die Abbildung des Punktraumes, Ebenenraumes und Geradenraumes. Da jeder Kreis der Bildebene Bild von zwei Raumpunkten ist, die sich in einer gewissen kubischen Automorphie des Abbildungskomplexes entsprechen, werden die Kreise der Bildebene zweckmäßigerweise orientiert. Dadurch stößt man auf eine interessante Transformation des Raumes, die dadurch entsteht, daß man die Zykel der Ebene einmal als zyklographische Punktbilder und einmal als Komplexbilder deutet. Durch diese Transformation werden die Ebenen des Raumes in kongruente Konoide 4. Grades und die Geraden in affine *Vivianis*che Fenster übergeführt.

Formelnummern und Hinweise ziehen sich durch beide Teile der Arbeit; das Literaturverzeichnis findet sich am Schluß des zweiten Teiles.

§ 1. Untersuchung des Abbildungsmittels

1. Es seien $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ homogene kartesische Normalkoordinaten mit x_0 als homogenisierender Koordinate, in denen die Bildebene π die Gleichung $x_3 = 0$ besitzt. Die absoluten Punkte I_1, I_2 von π haben dann

die Koordinaten $(0:1:i:0)$ bzw. $(0:1:-i:0)$ und wir betrachten die beiden Minimalstrahlbüschel $\{j_1\}$ und $\{j_2\}$

$$\begin{aligned} \{j_1\} \ldots \quad & x_2 - i\,x_1 - \lambda_1\,x_0 = x_3 - i\,x_0 = 0 \\ \{j_2\} \ldots \quad & x_2 + i\,x_1 - \lambda_2\,x_0 = x_3 + i\,x_0 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Koppelt man diese beiden Strahlbüschel in projektiver Weise so, daß ihr gemeinsamer Strahl, die Ferngerade der Bildebene π, nicht selbstentsprechend ist, so ist das Erzeugnis ein *quadratischer zirkularer Strahlkomplex* Σ. Greift man zwei konjugiert komplexe Geraden der beiden Büschel heraus, setzt also etwa

$$\lambda_1 = \varrho\, e^{i\varphi},\ \lambda_2 = \varrho\, e^{-i\varphi} \qquad (\varrho \text{ reell}), \tag{2}$$

so bilden die Treffgeraden dieser beiden Minimalstrahlen j_1, j_2 ein rechtsgewundenes Drehnetz, dessen Gleichungen in homogenen Plückerkoordinaten $p_1 : \ldots : p_6$ lauten

$$\begin{aligned} & p_1 + p_4 + p_3\,\varrho\cos\varphi - i(p_2 + p_5 - p_3\,\varrho\sin\varphi) = \\ = {} & p_1 + p_4 + p_3\,\varrho\cos\varphi + i(p_2 + p_5 - p_3\,\varrho\sin\varphi) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Läßt man dabei φ variieren, so erhält man einen Komplex Σ obiger Art, dessen Gleichung nach Elimination von φ aus (3) lautet

$$(p_1 + p_4)^2 + (p_2 + p_5)^2 = \varrho^2\,p_3^2. \tag{4}$$

Dieser Komplex $\Sigma(\varrho)$ besteht aus ∞^1 Drehnetzen, die durch Rotation um die x_3-Achse ineinander übergehen. Für jedes ϱ liegt ein zirkularer quadratischer Komplex $\Sigma(\varrho)$ der Charakteristik (11) (112) vor. $\Sigma(\varrho)$ ist ein *spezieller tetraedraler Komplex* mit einem ausgearteten Grundtetraeder, das aus den Ebenen

$$\iota_1 \ldots x_3 - i\,x_0 = 0,\ \iota_2 \ldots x_3 + i\,x_0 = 0, \tag{5}$$

den Ecken I_1, I_2 und den Kanten

$$i_1 \ldots x_2 - i\,x_1 = x_3 - i\,x_0 = 0,\ i_2 \ldots x_2 + i\,x_1 = x_3 + i\,x_0 = 0 \tag{6}$$

besteht. Die zu variablem ϱ gehörigen ∞^1 Komplexe $\Sigma(\varrho)$ sind *konsingulär*. Die Hauptstrahlen der ∞^1 Drehnetze, die einen solchen Komplex aufspannen, erfüllen den Drehzylinder

$$x_1^2 + x_2^2 - \varrho^2\,x_0^2 = 0 \tag{7}$$

um die x_3-Achse.

Wir werden im folgenden den zum Wert $\varrho = 1$ gehörigen Komplex $\Sigma(1)$ als Abbildungsmittel einer Komplexprojektion verwenden und kurz mit Σ bezeichnen.

2. Wir denken uns den Punktraum einer *Netzprojektion* mit Hilfe des rechtsgewundenen Drehnetzes $\mathfrak{N}$

$$p_1 + p_4 = p_2 + p_5 = 0 \tag{8}$$

auf die Bildebene π unterworfen. Die Brennstrahlen von $\mathfrak{N}$ sind die Grundkanten i_1, i_2 des Grundtetraeders von Σ, die Bildebene π also die Mittelebene des Netzes. Jedem Punkt P des Raumes wird dann der i. a. eindeutig bestimmte Spurpunkt P^w des durch P gehenden Netzstrahles zugeordnet. Ist ζ die „*Winkelkote*" von P, also jener Winkel, der mit der Höhenkote $z = x_3 : x_0$ des Punktes P durch die Beziehung

$$z = \operatorname{tg} \zeta \tag{9}$$

verknüpft ist, so entsteht P^w aus dem Normalriß P' von P auf die Bildebene π durch eine Drehstreckung um den Ursprung O durch den Winkel $-\zeta$ mit dem Streckungsverhältnis $\cos \zeta : 1$. Die Abbildungsgleichungen der Netzprojektion lauten daher

$$x_0^w : x_1^w : x_2^w = (x_0^2 + x_3^2) : (x_0 x_1 + x_2 x_3) : (x_0 x_2 - x_1 x_3). \tag{10}$$

Speziell das Netzbild P_u^w eines Fernpunktes P_u geht aus dem Zentralriß P_u^c von P_u aus dem Hilfsauge $A(1:0:0:1)$ durch eine positive Vierteldrehung um O hervor.

Jeder nicht horizontalen Geraden g des Raumes wird der Spurkreis g^w des durch g gehenden Netzhyperboloids $\mathfrak{H}$ zugeordnet; speziell das Netzbild h^w einer horizontalen Geraden h ist eine um die Winkelkote von h gegen den Grundriß h' von h verschwenkte Gerade, eine Erzeugende des durch h legbaren Netzparaboloids $\mathfrak{P}$. Diese Abbildung des Geradenraumes auf die Kreise der Bildebene — zu denen wir auch die Geraden zählen wollen — ist nicht umkehrbar eindeutig, da jeder Kreis in π als Netzbild von ∞^1 Geraden angesehen werden kann, die alle eine Erzeugendenschar einer Netzquadrik erfüllen; die zweite Erzeugendenschar besteht dann jeweils aus projizierenden Netzstrahlen. Aus der Theorie der Netzprojektion folgt, daß g^w die Strecke begrenzt vom Spurpunkt G der Geraden g und dem Netzbild G_u^w ihres Fernpunktes G_u als Durchmesser besitzt. Außerdem ist der Peripheriewinkel zwischen G und dem Netzbild P^w eines Punktes P von g gleich der negativen Winkelkote des Punktes P. Ist g durch Plückerkoordinaten $p_1 : \ldots : p_6$ gegeben, so hat ihr Spurpunkt G die Koordinaten $(p_3 : -p_5 : p_4 : 0)$, ihr Fluchtpunkt G_u^c für das Auge A die Koordinaten $(-p_3 : p_1 : p_2 : 0)$ und somit ihr Netzfluchtpunkt $G_u^w(p_3 : p_2 : -p_1 : 0)$. Der Durchmesser d des Netzbildes g^w von g hat daher die Größe

$$d = \frac{1}{p_3}\sqrt{(p_1 + p_4)^2 + (p_2 + p_5)^2}. \qquad (11)$$

Die Strahlen eines Komplexes $\Sigma(\varrho)$ besitzen nach (4) und (11) kongruente Netzbilder vom Durchmesser $d = |\varrho|$; speziell *der Abbildungskomplex Σ ist dadurch ausgezeichnet, daß seine Strahlen als Netzbilder Kreise vom Durchmesser* 1 *besitzen* [14].

3. Unter Ausnützung dieser Netzprojektion sollen nun die *projektiven Automorphien von Σ* aufgesucht werden. Jede dieser Automorphien kann als eine Transformation im Geradenraum angesehen werden, wobei die Strahlen von Σ nur vertauscht werden. Da bei jeder projektiven Automorphie von Σ die Kanten i_1 und i_2 des Grundtetreaeders festbleiben oder vertauscht werden, geht das Netz $\mathfrak{N}$ als Ganzes in sich über. Das Netzbild einer solchen Automorphie ist somit eine eindeutige kreistreue Punkttransformation in der Bildebene, also eine *Möbiustransformation*, die die Gesamtheit der Kreise vom Durchmesser 1 festläßt. Eine solche Transformation muß aber eine *kongruente Transformation* sein. *Der Gruppe der projektiven Automorphien von Σ entspricht daher im Netzbild die Gruppe kongruenter Transformationen in der Bildebene.*

Die einfachste kongruente Transformation ist die *Identität* in der Bildebene; sie ist das Netzbild einer Kollineation, bei der die Strahlen des Abbildungsnetzes einzeln festbleiben. Die einzigen Kollineationen dieser Art sind die ∞^1 *axialen Kollineationen* mit den Brennstrahlen i_1, i_2 von $\mathfrak{N}$ als Achsen. Ihre Gleichungen lauten

$$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' = (x_0 + a\,x_3) : (x_1 + a\,x_2) : (-a\,x_1 + x_2) : (-a\,x_0 + x_3); \qquad (12)$$

diese Transformationen bilden eine *eingliedrige Gruppe Z_1*.

Liegt nun in π eine von der Identität verschiedene, *kongruente Transformation* vor, so muß sich diese aus Bewegungen und Spiegelungen zusammensetzen lassen. Dabei bilden die gleichsinnig kongruenten Transformationen für sich eine Gruppe. Jede *Bewegung* besitzt einen eigentlichen Fixpunkt, der Mittelpunkt einer die Bewegung ersetzenden Drehung ist. Jede solche Drehung kann als Netzbild einer Kollineation angesehen werden, die den durch den Fixpunkt der Drehung zielenden Netzstrahl punktweise und die Ferngerade der Bildebene ebenenweise festläßt. Die Punktbahnen dieser speziellen halbaxialen Kollineationen sind dann horizontale Kreise mit Mitten auf der Punktfixgeraden. Zur obigen eingliedrigen Gruppe Z_1 automorpher Kollineationen von Σ kommt somit noch eine dreigliedrige Gruppe D_3 von „*projektiven*

Drehungen" um die Strahlen des Netzes $\mathfrak{N}$ hinzu. Die Gleichungen dieser Affinitäten lauten, wenn φ den Drehwinkel bedeutet

$$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' = x_0 : (b_0\, x_0 + \cos\varphi\, x_1 + \sin\varphi\, x_2 + b_1\, x_3) : \\ : (-\, b_1\, x_0 - \sin\varphi\, x_1 + \cos\varphi\, x_2 + b_0\, x_3) : x_3. \tag{13}$$

Σ besitzt somit eine *viergliedrige Gruppe* S_4 projektiver Automorphien, die sich durch Zusammensetzung von Z_1 und D_3 ergibt zu

$$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' = (x_0 + c_0\, x_3) : [c_1\, x_0 + (\cos\varphi - c_0 \sin\varphi)\, x_1 + (c_0 \cos\varphi + \\ + \sin\varphi)\, x_2 + c_2\, x_3] : [-\, c_2\, x_0 - (\sin\varphi + c_0 \cos\varphi)\, x_1 + \\ + (\cos\varphi - c_0 \sin\varphi)\, x_2 + c_1\, x_3] : (-\, c_0\, x_0 + x_3). \tag{14}$$

Außerdem besitzt Σ noch automorphe Kollineationen, die jedoch für sich keine Gruppe bilden und im Netzbild als *axiale Spiegelungen* erscheinen. Die Achse einer solchen Spiegelung bleibt punktweise fest, die entsprechenden Kollineation besitzt also sicher ∞^1 Fixgeraden, die eine Strahlschar des Netzparaboloids durch die Achse erfüllen. Dann existiert jedoch ein ganzes Netz von Fixgeraden und die Kollineation ist *axial*. Ihre Achsen müssen zwei zur Bildebene parallele Erzeugenden des Netzparaboloids sein. Die Netzbilder der ∞^2 Fixgeraden müssen durch die axiale Spiegelung in sich übergehen, d. h. diese Netzbilder sind jene Kreise, deren Mitten auf der Spiegelachse liegen. Sie schneiden daher die Spiegelachse, das Netzbild der Achsen der Kollineation, in Gegenpunkten; für die Winkelkoten dieser Achsen gilt daher $|\, \zeta_1 - \zeta_2 \,| = \\ = \pi/2$ und somit für ihre Höhenkoten z_1 und z_2

$$z_1\, z_2 = -\, 1. \tag{15}$$

Die Grundrisse der Achsen entstehen aus ihren, in die Spiegelachse zusammenfallenden Netzbildern durch Drehung um O durch die Winkelkote und sind daher zueinander *normal*. Da eine axiale Spiegelung involutorisch ist, muß auch die axiale Kollineation *involutorisch* sein.

Zu jeder axialen Spiegelung gehört eine axiale Involution, deren Achsen in den Ebenen $z_1 = 1$ und $z_2 = -\,1$ liegen; denkt man sich die Spiegelachse o. B. d. A. in die Gerade $x_1 - a x_0 = 0$ gelegt, so lautet die axiale Involution I

$$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' = x_3 : (2\, a x_3 - x_2) : (2\, a\, x_0 - x_1) : x_0. \tag{16}$$

Setzt man I mit Z_1 zusammen, so erhält man jene ∞^1 axialen Involutionen, deren Achsen Erzeugende eines Netzparaboloids sind und dasselbe Netzbild liefern. Da die Spiegelachse eine beliebige Gerade der Bildebene ist, besitzt Σ ∞^3 axiale involutorische Automorphien I.

Damit sind alle automorphen Kollineationen von Σ aufgesucht; sie bilden eine *viergliedrige Gruppe, die aus der viergliedrigen Gruppe S_4 und den ∞^3 axialen Involutionen I zusammengesetzt ist*[2].

4. Um diese Automorphien geometrisch zu deuten, ist es zweckmäßig, im Raum eine *quasielliptische Metrik* [16], [17], [18] einzuführen. Die absolute Quadrik Ω dieser in sich dualen Metrik lautet in Punkt- bzw. Ebenenkoordinaten

$$x_0^2 + x_3^2 = 0, \; u_1^2 + u_2^2 = 0 \tag{17}$$

und besteht aus den Punktfeldern in den Seitenebenen ι_1, ι_2 bzw. den Ebenenbündeln um die Ecken I_1, I_2 des Grundtetraeders von Σ. Die „rechtsgewundene" Erzeugendenschar von Ω wird von den beiden Büscheln $(I_1\, \iota_1)$, (I_2, ι_2) gebildet, die „linksgewundene" von den Büscheln (I_2, ι_1), $(I_1\, \iota_2)$. Es existiert eine siebengliedrige Gruppe G_7 von „*Quasiähnlichkeiten*", das sind solche Kollineationen, die die Maßfläche Ω in sich transformieren. Eine sechsgliedrige Untergruppe G_6, die Gruppe der „*Quasibewegungen*", liegt der quasielliptischen Bewegungsgeometrie zugrunde. Diese sechsgliedrige Gruppe läßt sich aus Rechts- und Linksschiebungen (das sind solche axiale Kollineationen, deren Achsen je einer Erzeugendenschar von Ω angehören) zusammensetzen, ihre Gleichung lautet

$$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' = (x_0 + a_0\, x_3) : (a_1\, x_0 + a_2\, x_1 + a_3\, x_2 + a_4\, x_3) :$$

$$: (a_5\, x_0 - a_3\, x_1 + a_2\, x_2 + a_6\, x_3) : (-\, a_0\, x_0 + x_3), \; (a_1 + a_5 = a_4 + a_6). \tag{18}$$

Zwei Punkte X, Y, deren Verbindungsgerade die Ferngerade $I_1\, I_2$ nicht trifft, besitzt gegenüber G_7 das Doppelverhältnis mit den Ebenen ι_1, ι_2 als Invariante; man bezeichnet

$$d = \frac{i}{2}\, ln\, (X\, Y\, \iota_1\, \iota_2) \tag{19}$$

als „*Quasientfernung*" von X und Y. Berechnet man speziell die Quasientfernung eines Punktes P von der Bildebene π, so erhält man, wenn z die Höhenkote von P bedeutet

---

[2] Die von *K. Strubecker* [15] untersuchte Transformationstheorie dieser Komplexe stützt sich auf eine gewisse dreigliedrige, kommutative Untergruppe G_3 von automorphen Kollineationen. Diese G_3 besteht aus jenen ∞^2 parabolisch axialen Kollineationen um die Gerade $I_1\, I_2$, zu deren Fixgeraden die beiden Minimalstrahlbüschel in den Ebenen ι_1 und ι_2 gehören und den Kollineationen der Gruppe Z_1. Das Netzbild dieser dreigliedrigen Gruppe G_3 sind die *Schiebungen* in der Bildebene. Ausgehend von dieser Deutung der G_3 ließe sich die Transformationstheorie durchsichtig darstellen.

$$d = \frac{i}{2} ln\,(z, 0, i, -i) = \operatorname{arctg} z = \zeta, \tag{20}$$

d. h. *die Winkelkote ζ eines Punktes ist gleich seiner Quasientfernung von der Bildebene.* Die Quasientfernung zweier Punkte ist demnach die Differenz ihrer Winkelkoten.

Trifft die Verbindungsgerade $X\,Y$ die Ferngerade $I_1\,I_2$, so wird $d = 0$ und es tritt als neue Invariante, allerdings nur gegen G_6, der Ausdruck

$$\delta = \frac{1}{x_0\,y_0 + x_3\,y_3} \sqrt{\left|\begin{matrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} x_0 & x_2 \\ y_0 & y_2 \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{matrix}\right|^2} \tag{21}$$

auf; wir bezeichnen diese Invariante, die nur für Punkte gleicher Winkelkote erklärt ist, als „*Quasidistanz*". Führt man durch eine Quasibewegung die Verbindungsgerade $X\,Y$ über in eine Parallele zur x_1-Achse, wobei der Punkt X auf die x_3-Achse zu liegen kommt, so besitzen die Punkte X, Y die neuen Koordinaten $(1:0:0:z)$ bzw. $(1:x:0:z)$ und man erhält für δ unter Verwendung von (9)

$$\delta = x : \sqrt{1 + z^2} = x \cos \zeta, \tag{22}$$

d. h. *die Quasidistanz zweier Punkte ist gleich dem Abstand ihrer Netzbilder.*

Die Strahlen des Abbildungsnetzes $\mathfrak{N}$ treffen die beiden konjugiert isotropen Geraden i_1, i_2, die Erzeugenden derselben Schar von Ω sind. Die Strahlen dieses Netzes sind daher im *Clifford*schen Sinn als Rechtsparallelen zur x_3-Achse anzusprechen und die *Netzprojektion als Parallelprojektion des quasielliptischen Raumes* auf die Bildebene π. Der Netzriß eines Netzhyperboloids ist sein Spurkreis in der Bildebene, die Netzhyperboloide sind daher *quasielliptische Abstandsflächen* der Strahlen des Netzes $\mathfrak{N}$, wobei der Radius dieses Spurkreises gleich der Quasidistanz der Punkte der Fläche vom Achsennetzstrahl sind.

In dualer Weise wird als „*Quasiwinkel*" zweier Ebenen α und β mit den Koordinaten u_i bzw. v_i, deren Schnittgerade die Ferngerade $I_1\,I_2$ nicht schneidet, die Invariante gegen G_7

$$w = \frac{i}{2} ln\,(\alpha\,\beta\,I_1\,I_2) \tag{23}$$

erklärt; trifft ihre Schnittgerade jedoch $I_1\,I_2$, so ist $w = 0$ und es liegt gegen G_6 die neue Invariante

$$\omega = \frac{1}{u_1 v_1 + u_2 v_2} \sqrt{\left|\begin{matrix} u_0 u_1 \\ v_0 v_1 \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} u_0 u_2 \\ v_0 v_2 \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} u_1 u_3 \\ v_1 v_3 \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} u_2 u_3 \\ v_2 v_3 \end{matrix}\right|^2} \tag{24}$$

vor.

Der Quasiwinkel zwischen zwei Geraden a, b ist gleich dem Quasiwinkel jener durch a bzw. b gehenden Ebenen α bzw. β, die auf der Verbindungsebene von a und b normal stehen.

5. Im Rahmen dieser quasielliptischen Metrik können die kollinearen Automorphien von Σ durchsichtig charakterisiert werden. Die Transformation der viergliedrigen Gruppe S_4 bestehen aus *Cliffords*chiebungen in Richtung der Strahlen des Netzes $\mathfrak{N}$ und Drehungen um diese und stellen daher *quasielliptische Schraubungen* um die Strahlen des Netzes $\mathfrak{N}$ dar. Auch die axialen Involutionen I lassen eine quasielliptische Deutung zu; die Achsen einer solchen Kollineation sind windschief normal und liegen in zu ι_1 und ι_2 harmonischen Ebenen durch $I_1 I_2$. Sie können daher als ein Paar reziproker Polaren von Ω angesprochen werden. Die axiale Involution ist daher eine *axiale quasielliptische Spiegelung* an einer Treffgeraden von $I_1 I_2$. Zusammengefaßt gilt: *Die automorphen Kollineationen von Σ bilden eine viergliedrige Gruppe quasielliptischer Bewegungen; sie besteht aus der viergliedrigen Gruppe quasielliptischer Schraubungen um die Strahlen des durch die Grundtetraederkanten i_1, i_2 bestimmten Netzes und den quasielliptischen axialen Spiegelungen an den Treffgeraden der Grundtetraederkante $I_1 I_2$.*[3]

Dies läßt nun eine einfache quasielliptische Deutung von Σ zu. Die von einem Punkt ausstrahlenden Komplexstrahlen erfüllen einen Kegel 2. Grades, der wegen obiger Automorphien von Σ als *quasielliptischer Drehkegel* um den durch die Spitze des Kegels gehenden Strahl des Netzes $\mathfrak{N}$ anzusehen ist. Wegen der Transitivität der Automorphiengruppe ist der Öffnungswinkel dieses Drehkegels von der Lage der Spitze im Raum unabhängig. Um die Größe dieses Öffnungswinkels zu bestimmen, transformieren wir die Spitze des Komplexkegels durch eine Automorphie von Σ in den Fernpunkt Z_u der x_3-Achse. Die Achse des Komplexkegels liegt dann in der x_3-Achse und wir bestimmen den Quasiwinkel, den diese mit der die positive x_1-Achse treffenden Erzeugenden des Komplexkegels einschließt. Ist R der Radius des Spurkreises des Komplexkegels von Z_u, so lautet diese Erzeugende

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 : R : 0 : \lambda. \tag{25}$$

[3] *K. Strubecker*, zerlegt in [10] die Automorphiengruppe auf andere Weise.

Ihr Quasiwinkel mit der x_3-Achse stimmt überein mit dem Quasiwinkel der beiden Ebenen $[0:1:0:0]$ und $[-R:1:0:0]$. Die Schnittgerade dieser Ebenen schneidet $I_1 I_2$, sodaß jener Sonderfall vorliegt, in dem die beiden Ebenen nur eine Invariante gegen G_6 besitzen. Unter Verwendung von (24) erhält man

$$\omega = R. \tag{26}$$

Aus der Gleichung des Komplexes $\Sigma(\varrho)$ (4) erhält man für die Strecke $R = \varrho$, d. h. für unseren Abbildungskomplex Σ gilt $\omega = 1$.

Die Strahlen des Komplexes Σ sind also dadurch ausgezeichnet, daß sie gegen die Strahlen des Netzes $\mathfrak{N}$ den Quasiwinkel $\omega = 1$ bilden. Diese weitgehende Analogie zum Abbildungskomplex der Zyklographie legt es nahe, unsere Komplexprojektion als *„quasielliptische Zyklographie"* zu bezeichnen.

Die obigen Überlegungen gestatten es, den Durchmesser ϱ des Netzbildes g^w einer Geraden g im Rahmen der quasielliptischen Geometrie zu interpretieren. Denkt man sich einen die Gerade g schneidenden Netzstrahl durch eine Automorphie von Σ (und damit von $\mathfrak{N}$) so in die x_3-Achse transformiert, daß g in die Gerade (25) übergeht, so wird g^w zum Kreis über der Strecke begrenzt von O und $(1:R:0:0)$; also gilt $\varrho = R$ und nach (26) $\varrho = \omega$. Der Wert von ω ist aber vom speziellen, g treffenden Netzstrahl unabhängig, d. h. *Alle eine Gerade g treffenden Netzstrahlen bilden mit dieser denselben Quasiwinkel; dieser ist gleich dem Durchmesser des Netzbildes von g.*

6. Wir untersuchen für später jene *Punkttransformation T, bei der entsprechende Punkte auf demselben Strahl des Netzes $\mathfrak{N}$ liegen und entgegengesetzt gleiche Winkelkoten besitzen.* Die Gleichungen dieser Transformation lauten

$$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' = x_0(x_0^2 + x_3^2) : [x_1(x_0^2 - x_3^2) + 2\, x_0\, x_2\, x_3] :$$
$$: [x_2(x_0^2 - x_3^2) - 2\, x_0\, x_1\, x_3] : -\, x_3(x_0^2 + x_3^2). \tag{27}$$

T ist kubisch, involutorisch, läßt die Punkte der Bild- und Fernebene einzeln fest und führt jeden Strahl des Netzes $\mathfrak{N}$ in sich über.

Die Punktreihe auf einer Geraden $g(p_1 : \ldots : p_6)$ besitzt eine Parameterdarstellung der Form

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = p_3 : (-\, p_5 + \lambda\, p_1) : (p_4 + \lambda\, p_2) : \lambda\, p_3, \tag{28}$$

wobei $\lambda = 0$ den Spurpunkt G und $\lambda = \infty$ den Fernpunkt G_u von g festlegt. Diese Gerade g geht durch die Transformation T über in die *Kubik*

$$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' = p_3(1 + \lambda^2) : [(- p_5 + \lambda p_1)(1 - \lambda^2) + 2\lambda(p_4 + \lambda p_2)] :$$
$$: [(p_4 + \lambda p_2)(1 - \lambda^2) - 2\lambda(- p_5 + \lambda p_1)] : - \lambda p_3(1 + \lambda^2). \quad (29)$$

Diese Kubik, die naturgemäß durch den Spurpunkt G und den Fernpunkt G_u von g geht, ist ein *kubischer Kreis*, der in I_1, I_2 die isotropen Brennstrahlen des Drehnetzes $\mathfrak{N}$, die Geraden i_1, i_2, berührt. Den ∞^4 Geraden des Raumes entsprechen die ∞^4 Kubiken dieser Art, jede von ihnen ist durch Vorgabe zweier ihrer Punkte, etwa G und G_u festgelegt. Da bei Ausübung von T das Netz $\mathfrak{N}$ in sich übergeht, liegt die Gerade g und die ihr entsprechende Kubik auf demselben Netzhyperboloid. Insbesondere gilt das für die Strahlen des Komplexes Σ; jene Kubiken aber, die auf denselben Netzquadriken wie die Strahlen von Σ liegen und in I_1, I_2 die Brennstrahlen i_1, i_2 berühren, sind *Ordnungskubiken von* Σ [14]. T führt daher die Strahlen von Σ über in die Ordnungskubiken von Σ und ist daher eine *involutorische kubische Automorphie von* Σ[4].

Diese kubische Punktverwandtschaft T besitzt noch eine andere Bedeutung; zu diesem Zweck führen wir ein neues projektives Koordinatensystem $(y_0 : y_1 : y_2 : y_3)$ ein, in dem die Punkte $A_1(1 : 0 : 0 : i)$, $A_2(1 : 0 : 0 : - i)$, $I_1(0 : 1 : i : 0)$, $I_2(0 : 1 : - i : 0)$ die Koordinaten $A_1(1 : 0 : 0 : 0)$, $A_2(0 : 1 : 0 : 0)$, $I_1(0 : 0 : 1 : 0)$, $I_2(0 : 0 : 0 : 1)$ erhalten. Der Übergang wird etwa durch die Kollineation

$$y_0 : y_1 : y_2 : y_3 = (i x_0 + x_3) : (- i x_0 + x_3) : (i x_1 + x_2) : (- i x_1 + x_2) \quad (30)$$

hergestellt; Σ erhält in den neuen Strahlkoordinaten $q_1 : \ldots : q_6$ die Gleichung

$$4 q_1^2 - q_2 q_5 = 0 \quad (31)$$

und die Transformation T lautet

$$y_0' : y_1' : y_2' : y_3' = y_0 y_1^2 : y_0^2 y_1 : y_1^2 y_2 : y_0^2 y_3. \quad (32)$$

Der Strahlkomplex Σ kann nun als *Tangentenkomplex einer nichteuklidischen Schraubung* aufgefaßt werden [15]; als Schraubquadriken kommen dabei nur solche Flächen 2. Grades in Frage, die durch das Grundtetraeder von Σ gehen und sich längs der Ferngeraden I_1, I_2 berühren. Dies liefert zwei einparametrige Scharen von *Netzparaboloiden*, nämlich

[4] Diese Transformation unterscheidet sich von der von *K. Strubecker* in [15] verwendeten kubischen Automorphie nur durch eine Spiegelung des Grundrisses am Ursprung.

$$x_0^2 + x_3^2 + \lambda(x_0\, x_1 + x_2\, x_3) = 0 \tag{33}$$

bzw.

$$x_0^2 + x_3^2 + \Lambda(x_0\, x_2 - x_1\, x_3) = 0 \tag{34}$$

die durch Rechtwinkeldrehung um die x_3-Achse ineinander übergehen; wir betrachten im folgenden nur die Schar (33).

Ist Σ der Tangentenkomplex einer Schraubung $\mathfrak{S}$, so muß die eingliedrige Schraubungsgruppe eine Untergruppe jener zweigliedrigen Gruppe sein, die jede Fläche des Büschels (33) einzeln festläßt. Diese zweigliedrige Gruppe erhält man durch Zusammensetzung der x_3 parallelen Rechtscliffordschiebungen und der parabolisch axialen Kollineationen um die Ferngerade $I_1\, I_2$, die durch die *Chasles*sche Berührkorrelation der Flächen (33) längs dieser bestimmt wird[5]. Ihre Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} x_0' : x_1' : x_2' : x_3' = (x_0 + \mu\, x_3) : (\mu\, \nu\, x_0 + x_1 + \mu\, x_2 - \nu\, x_3) : \\ : (\nu\, x_0 - \mu\, x_1 + x_2 + \mu\, \nu\, x_3) : (-\mu\, x_0 + x_3) \end{aligned} \tag{35}$$

Eine eingliedrige Untergruppe entsteht für

$$\mu = \operatorname{tg} k\, \nu; \tag{36}$$

bei variablem k entstehen ∞^1 *koaxiale projektive Schraubungen*. Durch Übergang zum System (y) lauten diese Schraubungen

$$y_0' : y_1' : y_2' : y_3' = y_0\, e^{ik\nu} : y_1\, e^{-ik\nu} : e^{ik\nu}(-i\, \nu\, y_0 + y_2) : e^{-ik\nu}(i\, \nu\, y_1 + y_3). \tag{37}$$

Damit der Tangentenkomplex dieser Schraubung mit dem Komplex Σ übereinstimmt, muß $k = \pm\, 1/4$ sein; Σ ist natürlich Tangentenkomplex zweier koaxialer Schraubungen, die konjugiert sind.

Durch diese Schraubung $\mathfrak{S}$ für etwa $k = +\, 1/4$ wird im Raum ein *kubisches Nullsystem* $\mathfrak{M}$ definiert, in dem jedem Punkt $P(y)$ seine Bahnschmiegebene $\pi(u)$ in $\mathfrak{S}$ zugewiesen wird. Aus den Gleichungen von $\mathfrak{S}$ erhält man für $\mathfrak{M}$:

$$u_0 : u_1 : u_2 : u_3 = y_1^2(y_2 - 4\, y_0) : y_0^2(4\, y_1 - y_3) : -\, y_0\, y_1^2 : y_0^2\, y_1. \tag{38}$$

Setzt man dieses kubische Nullsystem mit der Korrelation

$$y_0' : y_1' : y_2' : y_3' = u_2 : -\, u_3 : (-\, u_0 + 4\, u_2) : (u_1 - 4\, u_3) \tag{39}$$

zusammen, so erhält man die kubische Transformation T (32). (39) besteht aus der *Polarität* an der Fläche Φ

[5] Im Netzbild erscheinen diese Kollineationen als x_3 parallele Schiebungen.

$$2(y_1^2 - y_0^2) + y_1 y_3 - y_0 y_2 = 0 \tag{40}$$

und nachfolgender *Spiegelung*

$$y_0'' : y_1'' : y_2'' : y_3'' = -y_0 : -y_1 : y_2 : y_3. \tag{41}$$

Φ lautet im ursprünglichen Koordinatensystem

$$4 x_0 x_3 + x_0 x_2 + x_1 x_3 = 0 \tag{42}$$

und die Spiegelung

$$x_0'' : x_1'' : x_2'' : x_3'' = x_0 : -x_1 : -x_2 : x_3. \tag{43}$$

Φ ist eine Fläche des Gebüsches der Quadriken, die das Grundtetraeder von Σ als *Poltetraeder* besitzen; die Polarität an solchen Flächen führt bekanntlich die Schraubung $\mathfrak{S}$ in sich über [19].

Zusammengefaßt gilt: *Setzt man das kubische Nullsystem jener projektiven Schraubung, deren Tangentenkomplex der Komplex Σ ist, mit dem Polarsystem einer gewissen Quadrik, die das Grundtetraeder von Σ als Poltetraeder besitzt, zusammen, so erhält man — bis auf eine Spiegelung an der x_3-Achse — die kubische Automorphie T von Σ.*

Über die durch einen quadratischen Komplex der Charakteristik (11) (112) vermittelte Projektion II

Von

H. Brauner, Wien

Mit 3 Textabbildungen

(Eingegangen am 8. Juli 1957)

§ 2. Abbildung des Punktraumes

1. Jedem Raumpunkt P wird als *Komplexbild* P^k der Spurkreis des von P ausstrahlenden Komplexkegels zugeordnet. Gibt man P die inhomogenen kartesischen Koordinaten $1 : x_0 : y_0 : z_0 = x_0^0 : x_1^0 : x_2^0 : x_3^0$, so erhält man für P^k unter Verwendung der Gleichung des Abbildungskomplexes Σ ($\varrho = 1$) (4):

$$(x - \frac{x_0 + y_0 z_0}{1+z_0^2})^2 + (y - \frac{y_0 - x_0 z_0}{1+z_0^2})^2 - \frac{z_0^2}{1+z_0^2} = 0. \tag{44}$$

Dieser Kreis besitzt nach (10) das Netzbild P^w von P als Mittelpunkt; sein Radius R lautet bei Verwendung der Winkelkote ζ von P (die seinen quasielliptischen Abstand von der Bildebene π angibt)

$$R = |\sin \zeta|. \tag{45}$$

Die Punkte eines horizontalen Feldes besitzen daher kongruente Komplexbilder. Ähnlich wie in der Zyklographie ist es zweckmäßig, die Bildkreise zu *orientieren*, weil zu Punkten, die sich in der kubischen Automorphie T (27) von Σ entsprechen, nach (44) gleiche Komplexbilder gehören. Diese kubische Automorphie T, deren Netzbild die Identität ist, bewirkt im Komplexbild eine Umorientierung der Bildzykel. In T entsprechenden Punkten werden im Komplexbild *„ergänzende Zykel"* zugeordnet. Zusammengefaßt gilt: *Das Komplexbild eines Punktes ist ein Zykel um sein Netzbild, dessen Radius gleich dem Sinus seines quasielliptischen Abstandes von der Bildebene ist.*

Es liegt somit eine eineindeutige Abbildung der reellen Punkte des Raumes auf die Zykel der Bildebene mit $|R| \leq 1$ vor, wobei den Punkten der Bildebene die Nullkreise und den Fernpunkten die Einheitskreise entsprechen. Jene komplexen Raumpunkte, deren reelle Trägergerade ein Strahl des Drehnetzes $\mathfrak{N}$ (8) ist und eine rein imaginäre z-Kote besitzen, liefern ebenfalls reelle Bildkreise, die für $|z| > 1$ einteilig mit $|R| > 1$ und für $|z| < 1$ nullteilig sind. Für die Punkte in den Ebenen $z = \pm i$ artet die Abbildung aus.

Zur *konstruktiven Ermittlung* des Komplexbildes P^k eines Punktes P denken wir uns P durch seinen Grundriß P' auf die Bildebene π und seine Höhenkote z gegeben; außerdem sei der Einheitskreis um den Ursprung

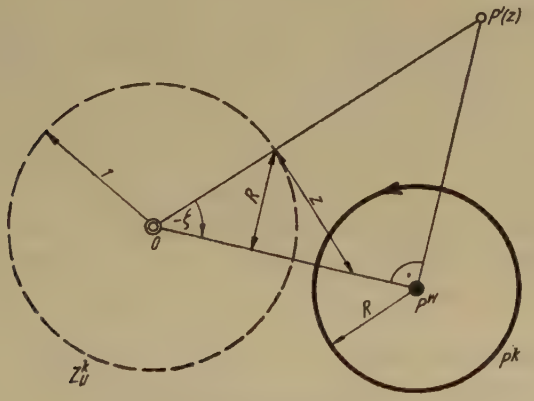

Abb. 1. Komplexprojektion eines Punktes

O, der als Komplexbild des Fernpunktes Z_u der z-Achse angesehen werden kann, bekannt. Schwenkt man den Fahrstrahl OP' um O durch den Winkel $-\zeta$, so liegt bekanntlich im Lotfußpunkt aus P' darauf das Netzbild P^w von P, die Mitte des Kreises P^k (Abb. 1). Der Radius $R = |\sin \zeta|$ von P^k ist leicht zu konstruieren, die Orientierung des Zykels P^k sei etwa positiv, wenn z positiv ist. Umgekehrt kann bei Vorgabe des Komplexbildes P^k der zugehörige Winkel ζ aus der Größe des Radius R und damit der Grundriß P' des Punktes P konstruiert werden.

2. Jeder projektiven Automorphie von Σ entspricht in der Bildebene eine gewisse *Zykeltransformation*; speziell die projektiven Drehungen (13) der dreigliedrigen Gruppe D_3 führen jede der horizontalen Ebenen in sich über und besitzen als Netzbild Bewegungen. Daraus

erkennt man, daß diese dreigliedrige Gruppe sich im *Komplexbild auf die Gruppe der Bewegungen* abbildet. Diese Tatsache kann zur Vereinfachung bei der Untersuchung spezieller Punktmannigfaltigkeiten, die auf *besondere Zykelsysteme* der Bildebene führen, verwendet werden.

a) *Konzentrische Zykel* sind das Komplexbild der Punkte jenes Strahles des Drehnetzes $\mathfrak{N}$, der durch den gemeinsamen Mittelpunkt dieser Zykel geht. Punktepaaren mit entgegengesetzt gleichen Winkelkoten entsprechen dabei ergänzende Zykel.

b) *Alle Kreise, deren Mitten auf einem festen Kreis g^w liegen*, entsprechen die Punkte des Netzhyperboloids $\mathfrak{H}$ durch g^w, also die Punkte einer *quasielliptischen Abstandsfläche* des Netzstrahles durch die Mitte von g^w. Ist g^w eine Gerade, so erfüllen die zugehörigen Punkte ein Netzparaboloid.

c) Wir fassen die Gesamtheit jener ∞^2 Kreise ins Auge, die einen (einteiligen oder nullteiligen) Kreis q mit der Mitte O und dem Radius r orthogonal schneiden. Ist P^k ein Kreis dieses *Kreisbündels* mit der Mitte P^w, so gilt für seinen Radius R, wenn P^w von O den Abstand a hat:

$$r^2 + R^2 = a^2. \tag{46}$$

Für die Koordinaten x, y, z des zugehörigen Raumpunktes gilt dann wegen $a^2 = x^2 + y^2$ und nach (44)

$$x^2 + y^2 - z^2\ (r^2 + 1) - r^2 = 0. \tag{47}$$

Dies ist eine *Drehfläche 2. Grades* Φ_r, deren Mitte in O liegt; diese Fläche geht durch die kubische Transformation T in sich über. Bei variablem r bilden die Flächen Φ_r ein *Flächenbüschel*, das sich mit dem Parameter $\lambda = -(r^2 + 1)$ schreiben läßt

$$x^2 + y^2 + 1 + \lambda\ (z^2 + 1) = 0. \tag{48}$$

Die Grundkurve dieses Büschels besteht aus zwei in den Ebenen $z = \pm i$ liegenden nullteiligen Kreisen vom Radius i, deren Mitten auf der z-Achse liegen. Die Fläche Φ_r schneidet die Bildebene in einem Kreis, der durch die komplexe Affinität $x \to ix$, $y \to iy$ in das Komplexbild der auf der z-Achse liegenden Scheitel von Φ_r übergeht. Die Flächen Φ_r sind für reelles r einschalige Hyperboloide; ist r rein imaginär, so ist Φ_r bei $|r| > 1$ nullteilig, bei $|r| < 1$ ein zweischaliges Hyperboloid, für $|r| = 1$ ein nullteiliger z-paralleler Zylinder vom Radius i, für $r = 0$ der Komplexkegel des Punktes O. Nach Anwendung einer Affinität (13) ergibt sich: *Die Kreise eines elliptischen oder hyperbolischen Kreisbündels mit dem Trägerkreis q sind Komplexbilder von Flächen 2. Grades*;

diese sind quasielliptische Drehflächen um einen Netzstrahl und schneiden die Ebenen $z = \pm i$ *in Kreisen vom Radius* i. Ist insbesondere q ein Kreis vom Radius i, so ist die Fläche ein *nullteiliger Zylinder* durch diesen Kreis. Ein *parabolisches Kreisbündel* ist das Komplexbild des vom Bündelzentrum ausstrahlenden *Komplexkegels*.

d) Wir betrachten das (elliptische oder hyperbolische) *Kreisbüschel*, das von allen Kreisen des Bündels mit dem Grundkreis q um O vom Radius r gebildet wird, deren Mitten auf der y-Achse liegen. Die zugehörigen Raumpunkte erfüllen eine gewisse Raumkurve, die sich als Schnitt der Fläche Φ_r mit dem Netzparaboloid durch die y-Achse

$$y z - x = 0 \tag{49}$$

ergibt. Durch diese Raumkurve 4. Ordnung 1. Art gehen auch die von den beiden Gundpunkten des Kreisbüschels ausstrahlenden Komplexkegel. Diese Kurve geht durch die kubische Transformation T in sich über; sie ist für $r \neq 0$ vom Geschlecht 1 und geht durch die absoluten Punkte I_1, I_2, wo sie deren Verbindungsgerade berührt. Ihr Grundriß besitzt in O einen Berührknoten und ist zirkular. Für $r = 0$ (parabolisches Kreisbüschel) besitzt die Kurve in O einen Doppelpunkt, dessen Tangenten die Schnittgeraden der Ebene $x = 0$ mit dem Komplexkegel von O ist. Ihr Grundriß ist dann eine Kappakurve [20]. — Durch Anwendung einer Affinität (13) erhält man Aussagen über allgemein liegende Kreisbüschel.

e) Schließlich möge noch jene Punktmannigfaltigkeit untersucht werden, deren Komplexbilder *von einem festen Kreis* k *nach einem Durchmesser geschnitten werden*. Wir denken uns k in einen Kreis um O bewegt und bezeichnen mit r seinen Radius. Dann gilt entsprechend zu (46)

$$r^2 = R^2 + a^2 \tag{50}$$

und damit

$$x^2 + y^2 + z^2 (1 - r^2) - r^2 = 0. \tag{51}$$

Auch diese *Drehflächen 2. Grades* Ψ_r besitzen die Mitten in O und gehen durch die Transformation T in sich über. Sie bilden bei variablem r das *Büschel*

$$x^2 + y^2 - 1 + \mu(z^2 + 1) = 0, \tag{52}$$

dessen Grundkurve aus zwei Einheitskreisen in den Ebenen $z = \pm i$ besteht. Die Scheitel der Fläche besitzen als Komplexbilder den Kreis k. Durch Anwendung einer Affinität (13) erhält man Aussagen über allgemein liegende Kreissysteme dieser Art.

§ 3. Abbildung des Ebenenraumes

1. Die in einer Ebene ε liegenden Komplexstrahlen aus Σ umhüllen eine *Kurve 2. Klasse.* Um diesen Kegelschnitt näher zu bestimmen, denken wir uns die Ebene ε, die durch ihre Spur e in der Bildebene und den in ihr verlaufenden Netzstrahl n aus $\mathfrak{N}$ festgelegt ist, durch eine automorphe Kollineation des Komplexes Σ in eine solche Lage gebracht, daß n in die z-Achse und die Spur e in die x-Achse übergeht. Dazu genügt eine Drehung in der Bildebene um einen Punkt D so, daß das Linienelement bestimmt durch den Spurpunkt von n und die Spur e übergeht in das Linienelement bestimmt durch O und die x-Achse. Dieser Drehung entspricht im Raum eine quasielliptische Drehung um einen Strahl des Netzes $\mathfrak{N}$, dessen Spurpunkt der Punkt D ist. Durch diese automorphe Affinität von Σ geht die Komplexkurve von ε in die Komplexkurve der xz-Ebene über, für deren Gleichung sich unter Verwendung der Gleichung des Komplexes Σ (4) ergibt

$$x^2 - z^2 = 1. \tag{53}$$

Diese gleichseitige Hyperbel besitzt das Netzbild der xz-Ebene, den Punkt O, als Mitte und einen in der Bildebene liegenden Durchmesser der Länge zwei, der konjugiert ist zu dem als Durchmesser fungierenden Netzstrahl der xz-Ebene. Ihre Asymptoten sind die Schnittgeraden der xz-Ebene mit dem von O ausstrahlenden Komplexkegel. Diese Hyperbel ist somit der Schnitt der xz-Ebene mit jenem Netzhyperboloid um die z-Achse, die als Spurkreis in der Bildebene einen Einheitskreis besitzt, also mit dem quasielliptischen Einheitszylinder um die z-Achse. Nach Anwendung einer Affinität (13) entsteht: *Die in einer Ebene ε liegende Komplexkurve von Σ ist der Schnitt von ε mit dem quasielliptischen Einheitszylinder um den Netzstrahl von ε.*

Für jede im Netz $\mathfrak{N}$ enthaltene Erzeugende eines solchen Netzhyperboloids fallen der Spurpunkt und das Netzbild ihres Fernpunktes zusammen, d. h. der Drehfluchtkreis eines solchen Hyperboloids ist inzident mit dem Bildspurkreis. Das ist aber der Einheitskreis um das Netzbild des Achsennetzstrahles und daher mit dem Komplexbild seines Fernpunktes identisch. Damit ergeben sich die *Drehfluchtpunkte der Asymptoten* eines Komplexkegelschnittes als Schnittpunkte der Drehflucht seiner Trägerebene mit dem Komplexbild des Fernpunktes des Netzstrahles seiner Trägerebene.

Die Komplexhyperbel einer Ebene ε kann nun im Grundriß leicht

konstruiert werden (Abb. 2): ε^{w} ist ihre Mitte, sie geht durch die Spurpunkte der Hyperbel und ihre Asymptoten sind normal zu den Verbindungsgeraden von O mit den Drehfluchtpunkten der Asymptoten.

Abb. 2. Komplexkurve einer Ebene

2. Faßt man die Ebene ε als *Punktfeld* auf, so entsprechen ihr ∞^2 Zykel, die — im Rahmen dieser Zyklographie — eine *„lineare Zykelkongruenz"* bilden. Ihr gehören alle konzentrischen Kreise um das Netzbild ε^{w} von ε als Bilder der Punkte des Netzstrahles in ε an. Die Punkte der Komplexhyperbel von ε besitzen Bildzykel, deren Mitten auf dem Einheitskreis um ε^{w} als Netzbild dieser Hyperbel liegen und die Spur e von ε, die man sich von ε^{w} aus nach beiden Seiten hin orientiert denken möge, berühren; dies folgt daraus, daß die Komplexkegel der Punkte der Komplexhyperbel von der Ebene ε berührt werden. Die Schichtengeraden von ε besitzen als Netzbilder Strahlen durch ε^{w}, alle Zykel, deren Mitten auf einer solchen Geraden liegen, sind gleich groß. Damit ist ein Überblick über die Anordnung der Zykel einer linearen Kon-

gruenz gewonnen und es kann entschieden werden, ob ein durch sein Komplexbild gegebener Punkt in einer gegebenen Ebene liegt.

Wir wollen auf Eigenschaften einer solchen linearen Zykelkongruenz hier nicht näher eingehen, jedoch jene Zykeltransformationen untersuchen, die das Komplexbild einer *quasielliptischen Spiegelung an der Ebene* ε ist. Alle quasielliptischen Normalen einer Ebene bilden ein Bündel paralleler horizontaler Geraden, die zu den Schichtengeraden von ε normal sind; auf solchen Geraden liegen zu ε symmetrische Punkte.

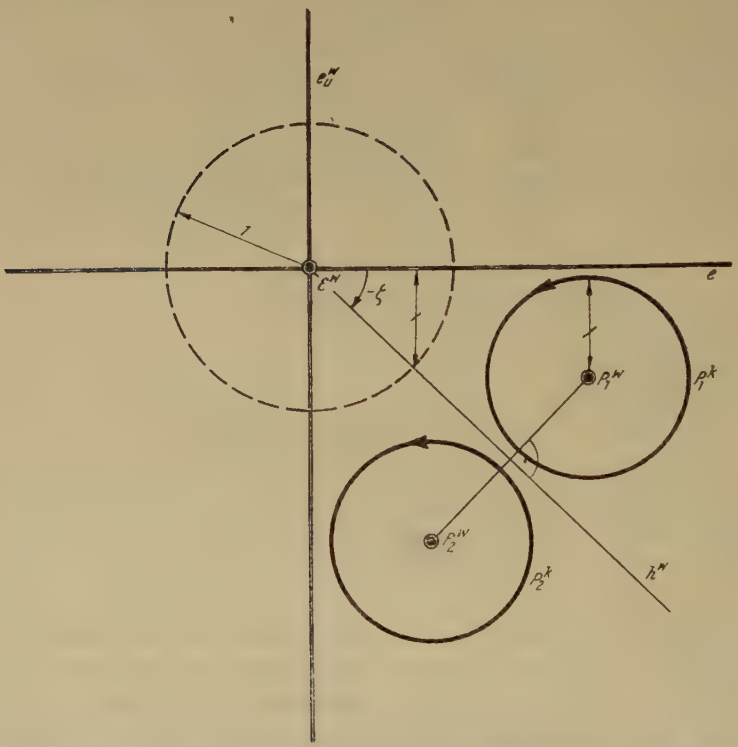

Abb. 3. Komplexbild einer quasielliptischen Spiegelung an einer Ebene

Da die Netzbilder horizontaler Felder zu diesen ähnlich sind, liegen daher die Mitten P_1^w und P_2^w der Komplexbilder P_1^k, P_2^k von zu ε symmetrischen Punkten P_1, P_2 symmetrisch zum Netzriß h^w der mit P_1 gleich hohen Schichtengeraden h von ε, während die Komplexbilder P_1^k und P_2^k gleich groß und gleich orientiert sind (Abb. 3). Der euklidische Abstand $P_1^w\ h^w$ ist dabei gleich dem quasielliptischen Abstand des

Punktes P_1 von ε. Für die Punkte der Ebene ε selbst ist dieser Abstand gleich Null. Ist P^k gegeben, so erhält man h^w als jene durch ε^w gehende Gerade, die mit der Spur e von ε jenen Winkel-ζ einschließt, für den $|\sin\zeta|$ gleich dem Radius von P^k ist.

Obige Überlegungen versagen nur dann, wenn die Ebene ε durch die Ferngerade der Horizontalstellung geht; in diesem Fall besteht die Komplexkurve in ε aus zwei Minimalstrahlbüschel und die lineare Zykelkongruenz aus lauter kongruenten Zykel.

§ 4. Abbildung des Geradenraumes

1. Einer *linearen Punktreihe* g wird als Komplexbild eine einparametrige Mannigfaltigkeit von Zykeln zugeordnet, deren Mitten das Netzbild g^w von g erfüllen. Die Hüllkurve dieser Zykel ist die Spurkurve jener Fläche Γ, die von den ∞^1 Komplexkegeln, deren Spitzen auf der Geraden g liegen, umhüllt wird. Diese „*Plückersche Komplexfläche*" Γ von g wird außerdem von den ∞^1 Komplexkegelschnitten in den Ebenen des Büschels um g erfüllt. Die gesuchte Spurkurve ist daher der Ort der Spurpunkte dieser ∞^1 Kegelschnitte.

Wir denken uns durch eine Affinität (13) die Gerade g in eine spezielle Lage gebracht, nämlich in eine Parallele im Abstand a zur z-Achse in der Ebene $x = 0$. Bedeutet dann λ die Höhenkote eines laufenden Punktes P auf g, so lautet der von P ausstrahlende Komplexkegel nach (4)

$$(-x + \lambda y - a z)^2 + (a - y - \lambda x)^2 = (\lambda - z)^2 \tag{54}$$

und daraus erhält man durch Einhüllendenbildung die Gleichung der Komplexfläche Γ zu:

$$(a y z + a x - z)^2 - (x^2 + y^2 - 1)[(x + a z)^2 + (a - y)^2 - z^2] = 0. \tag{55}$$

Das ist eine *Strahlfläche 4. Grades*, die die Gerade g als Doppelerzeugende besitzt und von den Ebenen $z = \pm i$ nach der in vier Minimalstrahlen zerfallenden Kurve 4. Ordnung

$$(x \pm i y)^2 (x \mp i y + a)^2 = 0 \tag{56}$$

geschnitten wird. Γ ist daher nach der *Sturm*schen Einteilung von VII. Art [21]; sie besitzt die Gerade g als Doppelerzeugende und die g schneidenden Strahlen der Linksstrahlschar (I_1, ι_2), (I_2, ι_1) als doppelte Leitgeraden. Γ ist daher in einem linksgewundenen Drehnetz enthalten. Jede Ebene durch die Gerade g schneidet aus ihr eine Hyperbel aus — die Komplexhyperbel der betreffenden Ebene — und Γ ist die Gesamtheit

aller Strahlen obigen Drehnetzes, die eine solche Hyperbel treffen. Zwei ihrer vier Torsallinien sind jene Erzeugenden der Rechtsstrahlschar, die den zu g parallelen Netzstrahl treffen.

Die Spurkurve dieser Fläche Γ, die von den Komplexbildern der Punkte von g doppelt berührt wird, ist eine rationale bezirkulare Quartik mit einem Doppelpunkt im Spurpunkt G von g. Diese Quartik erhält man konstruktiv durch folgende Überlegung: Die Komplexhyperbel in irgendeiner Ebene des Büschels um g besitzt den Netzumriß dieser Ebene zur Mitte und einen in der Bildebene liegenden Durchmesser der Länge zwei, der auf der Spur der Ebene, die durch den Spurpunkt G von g zielt, liegt. Da alle Netzumrisse der Ebenen des Büschels g den Netzkreis g^w erfüllen, ist die Spurkurve von Γ, das Komplexbild von g, eine Konchoide des Kreises g^w in bezug auf den Pol G, also eine *Pascalschnecke*, die den Mittelpunkt G_0 von g^w als Brennpunkt besitzt. Jede Pascalschnecke ist aber auch Fußpunktkurve eines gewissen Kreises, dessen Mitte der Gegenpunkt G_u^w von G auf dem Kreis g^w, also das Komplexbild des Fernpunktes von g ist, d. h.: *Das Komplexbild g^k einer Geraden g ist die Fußpunktkurve des Komplexbildes ihres Fernpunktes bezüglich ihres Spurpunktes.* Die Zuordnung zwischen den ∞^4 Geraden und jenen ∞^4 Pascalschnecken der Ebene, die Fußpunktkurven von Einheitskreisen sind, ist dabei *eineindeutig*.

Die *Konstruktion der Doppelpunkttangenten* einer Pascalschnecke kann leicht räumlich interpretiert werden. Die Doppelpunkttangenten von g^k sind die Spuren jener beiden Tangentialebenen des vom Spurpunkt G der Geraden g ausstrahlenden Komplexkegels, die durch die Gerade g gehen. Dieser Komplexkegel ist ein quasielliptischer Drehkegel um den durch G zielenden Netzstrahl, seine Drehflucht daher ein Kreis um G, und zwar vom Radius eins, wie sich aus (4) ergibt. Die aus dem Netzfluchtpunkt G_u^w von g an diesen Kreis legbaren Tangenten sind die Drehfluchtspuren der beiden gesuchten Tangentialebenen, die Doppelpunkttangenten von g^k daher ihre Lote aus G. Diese Doppelpunkttangenten sind reell getrennt für alle Geraden, deren quasielliptischer Winkel ω gegen die Strahlen des Drehnetzes $\mathfrak{N}$ größer als eins, und konjugiert komplex, wenn ω kleiner als eins ist.

Ist g speziell ein Strahl des Komplexes Σ, so liegt sein Spurpunkt G auf dem Komplexbild G_u^k des Fernpunktes von g; g^k ist daher eine *Kardioide*. Der Winkel ω hat dann den Wert eins, die Doppelpunkttangenten fallen daher zusammen. Ist g ein Strahl des Netzes $\mathfrak{N}$, so fällt G mit G_u^w zusammen und g^k ist das Komplexbild von G_u. Dieser Kreis

vom Durchmesser zwei ist der Spurkreis der *Plücker*schen Komplexfläche dieses Netzstrahles, die ein quasielliptischer Einheitszylinder ist.

Die obigen Überlegungen versagen nur dann, wenn g parallel zur Bildebene π ist; g^w ist dann eine Gerade und die Bildzykel der Punkte von g besitzen sämtlich gleichen Radius, so daß ihre Hüllkurve aus zwei zu g^w parallelen Speeren besteht.

2. Strahlmannigfaltigkeiten entsprechen in der Komplexprojektion *Mannigfaltigkeiten von Pascalschnecken*, die sämtlich Fußpunktkurven von Einheitskreisen sind. Es mögen einige einfache Beispiele besprochen werden.

a) Läßt man eine Gerade g um einen Strahl n des Netzes $\mathfrak{N}$ quasielliptisch rotieren, so entsteht ein *quasielliptisches Drehhyperboloid*, dessen eine Erzeugendenschar als Komplexbild eine Schar kongruenter Pascalschnecken besitzt, die durch Drehung um den Spurpunkt des Netzstrahles n ineinander übergehen. Ihre Doppelpunkte erfüllen dabei den Bildspurkreis dieser Fläche. Ist das Drehzentrum speziell der Brennpunkt G_0 der Pascalschnecke, also der Mittelpunkt des Netzbildes g^w von g, so geht g^w durch die Drehung in sich über, d. h. die Gerade g durchläuft eine *Netzstrahlschar*; die zweite Erzeugendenschar dieser Quadrik besteht dann aus lauter Netzstrahlen, deren Komplexbilder eine Drehschar von Einheitskreisen bilden, deren Mitten auf dem Spurpunkt der Fläche liegen. Ist das Drehzentrum schließlich ein Punkt P^w von g^w, so bilden die zugehörigen Geraden einen *quasielliptischen Drehkegel*, der vom Punkt P mit dem Netzbild P^w ausstrahlt und dessen Achse der durch P gehende Netzstrahl ist.

b) Je ∞^2 *kongruente Pascalschnecken* obiger Art, die durch eine *Schiebung* ineinander übergehen, sind die Komplexbilder von ∞^2 Geraden, die eine gewisse Kongruenz erfüllen. Für diese Geraden müssen dann auch die geordneten Punktepaare (G, G_u^w) durch die Schiebungsgruppe ineinander übergehen. Jede dieser Schiebungen ist Netzbild einer parabolischen Kollineation um die Ferngerade $I_1 I_2$ als Achse (vgl. Fn. 2); da alle diese parabolischen Kollineationen die Minimalstrahlbüschel (I_1, ι_1) und (I_2, ι_2) strahlweise in sich überführen, durchläuft die Gerade g bei Anwendung dieser Kollineationsgruppe ein *rechtsgewundenes Drehnetz*, dessen Brennstrahlen die Verbindungsgeraden der Schnittpunkt von g mit den Ebenen ι_1 und ι_2 mit den Punkten I_1 bzw. I_2 sind.

c) Untersucht man schließlich den Komplex aller Geraden g, deren Komplexbilder *kongruente Pascalschnecken* sind, so sind auch die Netzbilder dieser ∞^3 Geraden kongruent und die Geraden erfüllen einen zu

Σ *konsingulären Komplex* $\Sigma(\varrho)$. Speziell alle kongruenten Kardioiden obiger Art führen auf den Abbildungskomplex Σ.

§ 5. Zusammenhang zwischen der Komplexprojektion und der Zyklographie

Faßt man die Zykel der Bildebene π einmal als *Komplexbilder* P^k der Punkte P eines Raumes R und einmal als zyklographische Bilder der Punkte P^* eines Raumes R^* auf, so wird dadurch eine eindeutige *Punkttransformation* A zwischen den Räumen R und R^* induziert, wobei die reellen Punkte des Raumes R auf die reellen Punkte des Parallelstreifens $-1 \leq z^* \leq 1$ des Raumes R^* abgebildet werden. Um die Eindeutigkeit nicht zu stören, sollen dabei jene Punkte in $z^* = 1$ und $z^* = -1$, die denselben Grundriß besitzen, als identisch angesehen werden. Ist ein Punkt P aus R durch $x, y, z = \operatorname{tg} \zeta$ festgelegt, so besitzt der Punkt P^* nach (10) und (45) die Koordinaten:

$$x^* = (x + yz) : (1 + z^2),\ y^* = (y - xz) : (1 + z^2),\ z^* = \sin \zeta \tag{57}$$

oder in homogenen Koordinaten

$$x_0^* : x_1^* : x_2^* : x_3^* = (x_0^2 + x_3^2) : (x_0 x_1 + x_2 x_3) : (x_0 x_2 - x_1 x_3) : x_3 \sqrt{x_0^2 + x_3^2}. \tag{58}$$

Diese Transformation A führt die Strahlen des Drehnetzes $\mathfrak{N}$ in die lotrechten Geraden und jede horizontale Gerade bzw. Ebene wieder in eine solche über; insbesondere bleibt das Feld der Bildebene π punktweise fest. Damit ist A als eine Abbildung von der Art erkannt, die *Ebenen in gerade Konoide mit parallelen Achsen überführen* und die von *E. Müller* [3] untersucht wurden. Sie werden durch eine Gleichung der Art $z^* = f(\zeta)$ mit $f(0) = 0$ charakterisiert und führen für $f(\zeta) = \zeta$ auf die *Tuschel*sche Schraubliniengeometrie [2], [3]. Die sich hier mit $f(\zeta) = \sin \zeta$ ergebende Transformation A wurde bisher nicht untersucht.

Die viergliedrige Gruppe der Affinitäten S_4 (14) führt den Komplex Σ und das Drehnetz $\mathfrak{N}$ in sich über und besteht aus den quasielliptischen Schraubungen um die Strahlen von $\mathfrak{N}$. Die Transformation A führt diese Gruppe über in die Gruppe der euklidischen Schraubungen um zur z-Achse parallele Achsen. Speziell die dreigliedrige Gruppe D_3 (13) geht über in die *Gruppe der euklidischen Bewegungen parallel zur Bildebene* π.

Sämtliche Ebenen ε des Raumes R können durch quasielliptische Drehungen (13) ineinander übergeführt werden. Die ihnen in R^* ent-

sprechenden geraden Konoide ε^* müssen daher durch zu π parallele Bewegungen in sich übergeführt werden, also *kongruent* sein. Um ε^* näher festzulegen, wählen wir ε als die xz-Ebene. Diese geht dann durch A (58) über in

$$x_1^{*2}\, x_3^{*2} - x_2^{*2}\, (x_0^{*2} - x_3^{*2}) = 0, \tag{59}$$

oder in Zylinderkoordinaten mit $\operatorname{tg} \varphi = x_2^* : x_1^*$

$$z^* = \sin \varphi. \tag{60}$$

Dieses *Konoid 4. Grades*[6] ist zu allen Koordinatenebenen symmetrisch und nach der *Sturm*schen Einteilung von VII. Art [21]. Sie besitzt die z-Achse und die Ferngerade $I_1\, I_2$ als doppelte Leitgerade und die x-Achse als Doppelerzeugende. Die Ebenen durch diese Doppelerzeugende schneiden die Fläche nach konzentrischen Ellipsen, deren Grundrisse Kreise um O sind und deren Hauptscheitel in den Geraden $x = 0$, $z = \pm 1$ liegen. Diese Ellipsen sind die *Fallinien* der Fläche.

Geht man von einer allgemein liegenden Ebene aus, so erhält man durch A eine zu obigem Konoid kongruente Fläche, deren lotrechte Leitgerade durch den Netzumriß der Ebene geht und deren Spur als Doppelerzeugende besitzt.

Ist ε eine Ebene durch die *Gerade* g des Raumes R, so geht g in A in die Schnittkurve des Konoids ε^* mit einem lotrechten Drehzylinder über dem Netzbild g^w von g über. Da g^w den Netzumriß ε^w von ε enthält, geht der Zylinder durch die lotrechte, doppelte Leitgerade von ε^*. Außerdem enthalten beide Flächen die Minimalstrahlen durch den Fernpunkt der z-Achse, so daß die der Geraden g zugeordnete Kurve g^* eine *Raumkurve 4. Ordnung 1. Art* ist. Wählt man für ε jene durch g gehende Ebene, die auch den zu g parallelen Netzstrahl enthält und transformiert ε durch eine Affinität (13) wieder in die xz-Ebene, so wird g zu einer z-parallelen Geraden mit der Parameterdarstellung

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \varrho : 0 : \lambda. \tag{61}$$

Die dieser Geraden g entsprechende Kurve g^* lautet nach (58)

$$x_0^* : x_1^* : x_2^* : x_3^* = (1 + \lambda^2) : \varrho : -\lambda\varrho : \lambda \sqrt{1+\lambda^2}. \tag{62}$$

Der Grundriß dieser Kurve ist das Netzbild g^w von g

[6] Die Gleichung (60) ergibt sich direkt, wenn man beachtet, daß die Schichtenlinien von ε im Netzbild ein Strahlbüschel bilden, wobei der Winkel gegen die Spur der Ebene gleich der Winkelkote ζ ist. Unter Verwendung von $z^* = \operatorname{tg} \zeta$ und der Tatsache, daß die Schichtenlinien von ε in die Erzeugenden des Konoids ε^* übergehen, folgt (60).

$$x^2 - \varrho\, x + y^2 = 0, \tag{63}$$

ein Kreis vom Durchmesser ϱ, der Aufriß die Parabel

$$\varrho\, z^2 + x - \varrho = 0. \tag{64}$$

Die Kurve g^* liegt daher auch auf der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 + x\,(\frac{1}{\varrho} - \varrho) - 1 = 0, \tag{65}$$

die den Kreis g^w im Spurpunkt G berührt und den Radius $(\varrho + 1/\varrho) : 2$ besitzt. Daraus erkennt man: *Den Geraden entsprechen in der Transformation A die Schnittkurven von z-parallelen Drehzylindern über dem Netzbild der Geraden mit diese Zylinder im Spurpunkt der Geraden berührenden Kugeln.* Diese rationalen Kurven 4. Ordnung mit einem Doppelpunkt im Spurpunkt der Geraden sind *affin zum Vivianischen Fenster* [22]. Sämtliche Geraden eines Komplexes $\Sigma(\varrho)$ liefern *kongruente* Kurven, insbesondere sind den Strahlen des Abbildungskomplexes Σ gewöhnliche *Vivianis*che Fenster zugeordnet.

Auf jedem Konoid ε^* liegen für jeden Wert von ϱ unendlich viele Raumquartiken dieser Art und ε^* kann durch *zylindrische Rollung* einer dieser Kurven g^* erzeugt werden. Der Gangzylinder hat dabei als Grundriß das Netzbild g^w der betreffenden Geraden g der ε^* entsprechenden Ebene ε, der Rastzylinder einen doppelt so großen Kreis um das Netzbild ε^w von ε; dieser Kreis ist der Netzriß h^w der Komplexhyperbel h von ε jenes Komplexes $\Sigma(\varrho)$, in dem g Komplexstrahl ist. Dieser Rollung entspricht im Urraum R eine Schrotung des durch g legbaren Netzhyperboloids auf jenem Netzhyperboloid, das durch die Komplexhyperbel von ε in $\Sigma(\varrho)$ geht. Die beiden Hyperboloide berühren sich dabei in jedem Augenblick längs einer Erzeugenden, die horizontalen Ebenen bleiben einzeln fest. Die Erzeugende g überstreicht dabei die Ebene ε und umhüllt die Hyperbel h. Die h entsprechende Kurve h^* ist der Schnitt von ε^* mit dem lotrechten Zylinder über dem Kreis h^w; dieser besteht nach (59) aus zwei Ellipsen in Ebenen durch die Doppelerzeugende von ε^*, die zur Bildebene symmetrisch liegen. Diese beiden Ellipsen begrenzen jenen Teil von ε^*, der bei obiger zylindrischer Rollung überstrichen wird.

Literatur

[1] *J. Steiner*, Ges. Werke I. Berlin 1881, 408.

[2] *L. Tuschel*, Über die Schraubliniengeometrie und deren konstruktive Verwendung. Sitzb. Akad. Wiss. Wien 120, 233—254 (1911).

[3] *E. Müller*, Über die Punkttransformationen, die die Ebenen des Raumes in kongruente gerade Konoide mit parallelen Achsen überführen. Sitzb. Akad. Wiss. Wien 126, 915—929 (1917).

[4] *E. Kruppa*, Über die Misessche Abbildung räumlicher Kräftesysteme. ZaMM 4, 146—155 (1924).

[5] *F. Hohenberg*, Parallelprojektion in nichteuklidischen Räumen. Mh. Math. Phys. 42, 430ff. (1935).

[6] *R. Bereis-H. Brauner*, Schraubung und Netzprojektion. Elemente d. Math. XII, 33—40 (1957).

[7] *H. Brauner*, Über die Projektion mittels der Sehnen einer Raumkurve 3. Ordnung. Mh. Math. 59, 258—273 (1955).

[8] *H. Brauner*, Konstruktive Durchführung der durch die Sehnen einer Raumkurve 3. Ordnung vermittelten Abbildung des Raumes auf eine Ebene. Mh. Math. 60, 231—248 (1956).

[9] *L. Eckhart*, Über die Abbildungsmethoden der Darstellenden Geometrie. Sitzb. Akad. Wiss. Wien 132, 190f. (1923).

[10] *K. Strubecker*, Über zirkulare quadratische Komplexe. Sitzb. Akad. Wiss. Wien 145, 657—680 (1936).

[11] *K. Strubecker*, Zur Theorie der zirkularen quadratischen Komplexe. Sitzb. Akad. Wiss. Wien 147, 37—47 (1938).

[12] *E. Müller-J. Krames*, Vorlesungen über Darstellende Geometrie II, Die Zyklographie. Deuticke Wien 1929.

[13] *W. Schmid*, Über eine Zyklographie Z_4, die aus einem *Hirst*schen quadratischen Komplex abgeleitet ist. Sitzb. Akad. Wiss. Wien 142, 207—233 (1933).

[14] *H. Brauner*, Über Mannigfaltigkeiten von Strahlen mit kongruenten Netzrissen. Arch. Math. VII, 406—416 (1956).

[15] *K. Strubecker*, Transformationstheorie der Komplexe (11) (112). Mathematica XV, 135—156 (1939).

[16] *W. Blaschke*, Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie. Zeitschr. Math. Phys. 60, 61—91 (1911).

[17] *J. Grünwald*, Ein Abbildungsprinzip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft. Sitzb. Akad. Wiss. Wien 120, 677—741 (1911).

[18] *E. Müller-E. Kruppa*, Vorlesungen über Darstellende Geometrie I, Die linearen Abbildungen. Deuticke, Wien 1923, 240f.

[19] *R. Bereis-H. Brauner*, Die automorphen involutorischen Korrelationen koaxialer projektiver Schraubungen. Sitzb. Akad. Wiss. Wien 165, 327—355 (1956).

[20] *H. Wieleitner*, Spezielle ebene Kurven. Sammlung Schubert LVI, 1908, 73f.

[21] *E. Müller-J. Krames*, Vorlesungen über Darstellende Geometrie III, Konstruktive Behandlung der Regelflächen. Deuticke, Wien 1931, 296.

[22] *Th. Schmid*, Darstellende Geometrie I. Sammlung Schubert LXV, 1922, 197f.

Einige Ungleichungen für in einem Parallelstreifen holomorphe Funktionen

Von

Rudolf Albrecht, München

(Eingegangen am 13. Juli 1957)

Betrachtet werden nichtkonstante Funktionen

$$w = f(z);\ x = \Re z,\ y = \Im z;\ u = \Re f(z),\ v = \Im f(z);$$

die in einem Parallelstreifen

$$m_x < x < M_x,\ -\infty < y < \infty$$

holomorph sind und deren Realteil dort beschränkt ist,

$$m_u < u < M_u,$$

wobei

$$M_u = \sup \Re f(z),$$

$$m_u = \inf \Re f(z)$$

sei. Sind z_1, z_2 zwei Punkte des Parallelstreifens, so werden Ungleichungen für $\Re f(z_1)$, $\Re f(z_2)$, $\Im f(z_1)$, $\Im f(z_2)$ angegeben, die sich teilweise an die bekannten *Schwarz-Koebe*schen[1] anschließen. Ferner werden Beziehungen für die Realteile der Funktionen $f(z)$ auf Geraden $x = \text{const}$ erhalten, die mit Hilfe des harmonischen Maßes invariant formuliert werden können. Zur Herleitung dient in allen Fällen das Prinzip vom hyperbolischen Maß.

Das schlichte Gebiet

$$m_x < x < M_x,\ -\infty < y < \infty$$

kann durch die Funktion

---

[1] *H. A. Schwarz:* Ges. Werke, Bd. II, S. 190, S. 361.

P. Koebe: Über das Schwarzsche Lemma und einige damit zusammenhängende Ungleichheitsbeziehungen der Potentialtheorie und Funktionentheorie. Math. Zeitschr. 6 (1920), S. 52—84, insbes. S. 63. Dort werden im Einheitskreis holomorphe Funktionen mit beschränktem Realteil und $f(0) = 0$ betrachtet.

$$Z = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \left(\frac{z - m_x}{a} - \tfrac{1}{2} \right), \quad a = M_x - m_x, \tag{1}$$

umkehrbar eindeutig und konform auf den Einheitskreis $| Z | < 1$ einer Z-Ebene abgebildet werden. Dem Bogenelement

$$dE(Z) = \frac{2 | dZ |}{1 - | Z |^2}$$

der *Poincaré*schen n. e.[2] Maßbestimmung im Einheitskreis entspricht deshalb nach (1) im Parallelstreifen das Bogenelement

$$dE(z) = \frac{\pi}{a} \frac{| dz |}{\sin \frac{\pi}{a}(x - m_x)}, \tag{2}$$

wie man mit Hilfe der Beziehung

$$\cos \frac{\alpha}{2} \overline{\cos \frac{\alpha}{2}} - \sin \frac{\alpha}{2} \overline{\sin \frac{\alpha}{2}} = \cos \Re \alpha$$

schließt. Damit läßt sich die n. e. Metrik vom Einheitskreis auf den Parallelstreifen übertragen. Entsprechend kann im Parallelstreifen

$$m_u < u < M_u, \quad -\infty < v < \infty$$

bei Abbildung des Einheitskreises $| W | < 1$ einer W-Ebene auf diesen Parallelstreifen mittels der Funktion

$$W = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \left(\frac{w - m_u}{b} - \tfrac{1}{2} \right), \quad b = M_u - m_u, \tag{3}$$

das n. e. Bogenelement

$$dE(w) = \frac{\pi}{b} \frac{| dw |}{\sin \frac{\pi}{b}(u - m_u)} \tag{4}$$

eingeführt werden.

Die spezielle Wahl der Funktionen (1) und (3) bedeutet für die folgenden Ungleichungen in dieser Metrik keine Einschränkung, da die n. e. Bogenelemente gegenüber den Automorphismen der Einheitskreise invariant sind.

Ist

$$W = F(Z)$$

[2] n. e. als Abkürzung für nichteuklidisch.

eine in $|Z| < 1$ holomorphe unimodular beschränkte Funktion, so gilt der *Pick*sche Satz

$$\frac{|dZ|}{1-|Z|^2} \geqq \frac{|dW|}{1-|W|^2}, \tag{5a}$$

oder, für die n.e. Länge $L(\mathfrak{C}_Z)$ eines abgeschlossenen (euklidisch) rektifizierbaren Kurvenbogens $\mathfrak{C}_Z$ in $|Z| < 1$ und derjenigen $L(\mathfrak{C}_W)$ seines Bildes $\mathfrak{C}_W$ in $|W| < 1$ formuliert:

$$L(\mathfrak{C}_Z) \geqq L(\mathfrak{C}_W). \tag{5b}$$

Es sei erinnert, daß für eine n.e. Strecke $\mathfrak{C}_Z$, die die in $|Z| < 1$ gelegenen Punkte Z_1, Z_2 verbindet,

$$L(\mathfrak{C}_Z) = E(Z_1; Z_2) = 2\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\psi(Z_1; Z_2)$$

ist, wobei die pseudochordale Entfernung

$$\psi(Z_1; Z_2) = \left|\frac{Z_1 - Z_2}{1 - Z_1\overline{Z}_2}\right|$$

monoton mit $E(Z_1; Z_2)$ wächst. Das Gleichheitszeichen tritt in (5a, b) bekanntlich genau dann ein, wenn $F(Z)$ eine *schlichte* Abbildung von $|Z| < 1$ *auf* $|W| < 1$ vermittelt.

Aus (5a) schließen wir für die Funktionen $w = f(z)$ für $m_x < x < M_x$ auf

$$\frac{|dz|}{a \sin\frac{\pi}{a}(x - m_x)} \geqq \frac{|dw|}{b \sin\frac{\pi}{b}(u - m_u)} \tag{6}$$

infolge der umkehrbar eindeutigen Beziehung zwischen der z- und Z- bzw. w- und W-Ebene. Das Gleichheitszeichen tritt in (6) deshalb genau dann ein, wenn der Parallelstreifen der z-Ebene schlicht auf den Parallelstreifen der w-Ebene abgebildet wird. Die allgemeinste solche Funktion $w = f(z)$ genügt der Beziehung

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\left(\frac{w - m_u}{b} - \tfrac{1}{2}\right) = e^{i\varphi}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\left(\frac{z - m_x}{a} - \tfrac{1}{2}\right) - \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\left(\frac{z_0 - m_x}{a} - \tfrac{1}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\left(\frac{z - m_x}{a} - \tfrac{1}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\left(\frac{z_0 - m_x}{a} - \tfrac{1}{2}\right)}, \tag{7}$$

wobei φ reell und z_0 ein Punkt des Parallelstreifens ist. Für den Spezialfall, daß dabei die Randgerade $x = m_x$ in die Randgerade $u = m_u$ bzw.

$u = M_u$ und die Randgerade $x = M_x$ in die Randgerade $u = M_u$ bzw. $u = m_u$ übergeführt werden, sind die Punkte $Z = i, Z = -i$ Fixpunkte oder sie werden ineinander übergeführt. Daraus folgt $\varphi = 0$ bzw. $\varphi = \pi$,

$$W = \pm \frac{Z - i Y_0}{1 + i Z Y_0}, \quad -1 < Y_0 < 1,$$

und mit Hilfe des Additionstheorems der tg-Funktion und wegen der verlangten Ränderzuordnung

$$w - m_u = \frac{b}{a}(z - m_x) + i C_1,$$

bzw. (8)

$$M_u - w = \frac{b}{a}(z - m_x) + i C_2,$$

C_1, C_2 reelle Konstanten. Repräsentieren weiterhin die Parallelstreifen die universellen Überlagerungsflächen von konzentrischen Kreisringen einer t- bzw. s-Ebene, wobei z. B.

$$z - m_x = ln\, t, \; w - m_u = ln\, s \text{ bzw. } M_u - w = ln\, s$$

sei, so daß zwei äquivalenten Punkten

$$z_1, \; z_2 = z_1 + 2\pi i$$

zwei äquivalente Punkte

$$w_1, \; w_2 = w_1 + 2k\pi i,$$

k eine ganze Zahl, entsprechen, so folgt aus (8) durch Differenzbildung

$$k = \pm \frac{b}{a}, \tag{9}$$

d. h. b/a muß eine ganze positive Zahl sein. Ist schließlich die Abbildung der Kreisringe aufeinander schlicht, so ist bekanntlich nur $k = \pm 1$ möglich, wie auch aus

$$s = t^k e^{ic}$$

zu ersehen ist.

Bezeichnet $z_1 = x_1 + i\, y_1$, $z_0 = x_0 + i\, y_0$ zwei verschiedene Punkte des Parallelstreifens,

$$w_1 = f(z_1), \; \Re\, w_1 = u_1, \; \Im\, w_1 = v_1,$$
$$w_0 = f(z_0), \; \Re\, w_0 = u_0, \; \Im\, w_0 = v_0$$

ihre Bildpunkte und ist die n.e. Entfernung von z_1 und z_0 gleich ϱ,

$$\mathfrak{Tg}\,\frac{\varrho}{2} = \psi(z_1;\, z_2),$$

so liegt w_1 nach dem *Pick*schen Satz also im Innern des n.e. Kreises mit dem Radius ϱ und dem Mittelpunkt w_0 oder auf diesem Kreis, letzteres wenn eine der oben betrachteten Extremalfunktionen vorliegt. Die Gleichung dieses n.e. Kreises ist

$$\mathfrak{Tg}\,\frac{\varrho}{2} = \left| \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\left(\frac{w-m_u}{b} - \tfrac{1}{2}\right) - \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\left(\frac{w_0-m_u}{b} - \tfrac{1}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\left(\frac{w-m_u}{b} - \tfrac{1}{2}\right)\overline{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\left(\frac{w_0-m_u}{b} - \tfrac{1}{2}\right)}} \right|,$$

oder nach Umformung

$$\mathfrak{Tg}\,\frac{\varrho}{2} = \left| \frac{\sin\frac{\pi}{2b}(w-w_0)}{\sin\frac{\pi}{2b}(w+\overline{w}_0-2m_u)} \right|. \tag{10a}$$

Infolge der Beziehung

$$\sin\alpha\,\overline{\sin\alpha} = \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{Cof}\,2\,\Im\,\alpha - \cos 2\,\Re\,\alpha)$$

kann statt (10a) auch

$$\mathfrak{Tg}\,\frac{\varrho}{2} = \sqrt{\frac{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{b}(v-v_0) - \cos\frac{\pi}{b}(u-u_0)}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{b}(v-v_0) - \cos\frac{\pi}{b}(u+u_0-2m_u)}} \tag{10b}$$

geschrieben werden.

Im Einheitskreis $|W| < 1$ ist ein n.e. Kreis mit dem Radius ϱ ein euklidischer Kreis, der zwischen zwei ihn berührenden Kreisbogen des hyperbolischen Kreisbüschels mit den Grundpunkten $W = i$, $W = -i$ liegt. Den Kreisbogen dieses Büschels entsprechen Geraden $u = \text{const}$, die mit Ausnahme der Geraden

$$u = \frac{M_u + m_u}{2}$$

keine n.e. Geraden, aber n.e. „Parallelkurven" sind, während alle ihre Orthogonaltrajektorien im Einheitskreis bzw. im Parallelstreifen n.e. Gerade sind. Aus der Konformität der Abbildung schließt man also,

daß die n.e. Kreise im Parallelstreifen euklidische Ovale sind, die symmetrisch zur Geraden $v = v_0$ liegen. Diese Gerade schneidet aus dem n.e. Kreis die Punkte mit maximalen und minimalen u-Werten $u_{\max}$, $u_{\min}$ aus, wie auch durch einfache Rechnung aus (10b) gefolgert werden kann. Sind w_0 und ϱ fest vorgegeben, so berechnet man mit $v = v_0$ die Differenz $u_{\max} - u_0$ am einfachsten aus (10a):

$$\mathfrak{Tg}\,\frac{\varrho}{2} = \frac{\sin\dfrac{\pi}{2b}(u_{\max} - u_0)}{\sin\dfrac{\pi}{2b}(u_{\max} + u_0 - 2m_u)} =$$

$$= \frac{\sin\dfrac{\pi}{2b}(u_{\max} - u_0)}{\sin\dfrac{\pi}{2b}(u_{\max} - u_0)\cos\dfrac{\pi}{b}(u_0 - m_u) + \cos\dfrac{\pi}{2b}(u_{\max} - u_0)\sin\dfrac{\pi}{b}(u_0 - m_u)},$$

woraus

$$u_{\max} - u_0 = \frac{2b}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\dfrac{\pi}{b}(u_0 - m_u)}{\mathfrak{Ctg}\,\dfrac{\varrho}{2} - \cos\dfrac{\pi}{b}(u_0 - m_u)} \quad \text{(Hauptwert)}$$

folgt. Entsprechend erhält man aus

$$\mathfrak{Tg}\,\frac{\varrho}{2} = \frac{\sin\dfrac{\pi}{2b}(u_0 - u_{\min})}{\sin\dfrac{\pi}{2b}(u_0 + u_{\min} - 2m_u)}$$

$$u_0 - u_{\min} = \frac{2b}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\dfrac{\pi}{b}(u_0 - m_u)}{\mathfrak{Ctg}\,\dfrac{\varrho}{2} + \cos\dfrac{\pi}{b}(u_0 - m_u)} \quad \text{(Hauptwert).}$$

Die rechte Seite wird bei festem ϱ maximal für

$$\cos\frac{\pi}{b}(u_0 - m_u) = \pm\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\varrho}{2}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte findet man

$$\left.\begin{matrix} u_{\max} - u_0 \\ u_0 - u_{\min} \end{matrix}\right\} \leqq \frac{2b}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\varrho}{2}.$$

Damit hat man für die Realteile u_1, u_0 der Punkte w_1, w_0 folgende Abschätzung:

Für $u_1 \geqq u_0$ ist

$$u_1 - u_0 \leqq \frac{2b}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin \frac{\pi}{b}(u_0 - m_u)}{\operatorname{Ctg} \frac{\varrho}{2} - \cos \frac{\pi}{b}(u_0 - m_u)} \leqq \frac{2b}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \operatorname{Sin} \frac{\varrho}{2}, \quad \text{(11a)}$$

für $u_1 \leqq u_0$ ist

$$u_0 - u_1 \leqq \frac{2b}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin \frac{\pi}{b}(u_0 - m_u)}{\operatorname{Ctg} \frac{\varrho}{2} + \cos \frac{\pi}{b}(u_0 - m_u)} \leqq \frac{2b}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \operatorname{Sin} \frac{\varrho}{2}. \quad \text{(11b)}$$

Entsprechend kann die Schwankung der Imaginärteile abgeschätzt werden. Aus (10b) folgt bei Differentiation nach u und Nullsetzen der Ableitung $\frac{dv}{du}$ als Bestimmungsgleichung für den u-Wert der Punkte des n.e. Kreises mit maximalem und minimalem Imaginärteil $v_{\max}$, $v_{\min}$:

$$\operatorname{Tg}^2 \frac{\varrho}{2} \sin \frac{\pi}{b}(u + u_0 - 2m_u) = \sin \frac{\pi}{b}(u - u_0).$$

Daraus kann man mit Hilfe des Additionstheorems der trigonometrischen Funktionen

$$\cos \frac{\pi}{b}(u + u_0 - 2m_u) = \frac{\cos \frac{2\pi}{b}(u_0 - m_u) - \operatorname{Tg}^2 \frac{\varrho}{2}}{\sqrt{1 - 2\operatorname{Tg}^2 \frac{\varrho}{2} \cos \frac{2\pi}{b}(u_0 - m_u) + \operatorname{Tg}^4 \frac{\varrho}{2}}},$$

$$\cos \frac{\pi}{b}(u - u_0) = \frac{1 - \operatorname{Tg}^2 \frac{\varrho}{2} \cos \frac{2\pi}{b}(u_0 - m_u)}{\sqrt{1 - 2\operatorname{Tg}^2 \frac{\varrho}{2} \cos \frac{2\pi}{b}(u_0 - m_u) + \operatorname{Tg}^4 \frac{\varrho}{2}}}$$

berechnen, womit man aus (10b) für $v_{\max}$ die Gleichung

$$\left(1 - \operatorname{Tg}^2 \frac{\varrho}{2}\right) \operatorname{Cof} \frac{\pi}{b}(v_{\max} - v_0) = \sqrt{1 - 2\operatorname{Tg}^2 \frac{\varrho}{2} \cos \frac{2\pi}{b}(u_0 - m_u) + \operatorname{Tg}^4 \frac{\varrho}{2}}$$

erhält. Hieraus folgt schließlich

$$\mathfrak{Cof}\frac{\pi}{b}(v_{\max}-v_0)=\sqrt{1+\mathfrak{Sin}^2\varrho\sin^2\frac{\pi}{b}(u_0-m_u)},$$

$$v_{\max}-v_0=\frac{b}{\pi}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\left[\mathfrak{Sin}\,\varrho\sin\frac{\pi}{b}(u_0-m_u)\right]$$

und aus Symmetriegründen

$$v_0-v_{\min}=v_{\max}-v_0.$$

Bei festem ϱ wird die rechte Seite maximal für

$$\frac{\pi}{b}(u_0-m_u)=\frac{\pi}{2},$$

d. h. für

$$u_0=\frac{M_u+m_u}{2},$$

wie auch geometrisch im Kreise $|W|<1$ unmittelbar zu erkennen ist.

Man hat also für die Imaginärteile v_1, v_0 der Punkte w_1, w_0 folgende Abschätzung:

$$|v_1-v_0|\leqq\frac{b}{\pi}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\left[\mathfrak{Sin}\,\varrho\sin\frac{\pi}{b}(u_0-m_u)\right]\leqq\frac{b\varrho}{\pi}. \tag{12}$$

Ungleichung (12) weist auf einen wichtigen Spezialfall hin, wenn die Parallelstreifen die universellen Überlagerungsflächen von konzentrischen Kreisringen repräsentieren und zwei beliebigen Werten

$$z_1,\ z_2=z_1+2\pi i$$

des Parallelstreifens der z-Ebene die Werte

$$w_1=f(z_1);\ w_2=f(z_2)=w_1+2k\pi i,$$

k eine ganze Zahl, in der w-Ebene entsprechen. $\mathfrak{C}_z$ sei die n.e. Strecke, die z_1 mit z_2 verbindet. Statt durch Benützung der vorherigen Ergebnisse leiten wir direkt durch Integration des n.e. Bogenelements (2) längs $\mathfrak{C}_z$ ab:

$$E(z_1;z_2)=\frac{\pi}{a}\int_{\mathfrak{C}_z}\frac{|dz|}{\sin\frac{\pi}{a}(x-m_x)}\geqq\frac{\pi}{a}\int_{\mathfrak{C}_z}|dx+idy|\geqq\frac{\pi}{a}\left|\int_{\mathfrak{C}_z}dy\right|=\frac{2\pi^2}{a}. \tag{13}$$

Das Gleichheitszeichen tritt in (13) nur für $\Re z_1=\frac{M_x+m_x}{2}$ ein. Dann

ist $\mathfrak{C}_x$ Teil der n.e. Geraden $x = \dfrac{M_x + m_x}{2}$. Dies ist auch aus der geometrischen Deutung in der Z-Ebene zu erkennen. Die n.e. Strecke von w_1 nach w_2 sei $\mathfrak{C}_w$. Wegen

$$E(z_1; z_2) \geqq E(w_1; w_2)$$

nach dem *Pick*schen Satz und

$$E(w_1; w_2) \geqq \frac{2\pi^2 \mid k \mid}{b}$$

nach einer Überlegung wie bei Ungleichung (13) folgt also

$$\frac{2\pi^2}{a} \geqq \frac{2\pi^2 \mid k \mid}{b},$$

$$b \geqq a \mid k \mid. \tag{14}$$

Für den Fall einer *schlichten* Abbildung eines konzentrischen Kreisringes auf ein Ringgebiet, das die Ränder eines konzentrischen Kreisringes trennt, ist $\mid k \mid = 1$. Umgekehrt können diejenigen Funktionen $t = h(s)$, durch die ein derartiges Ringgebiet D_s der s-Ebene schlicht auf einen konzentrischen Kreisring der t-Ebene abgebildet wird, dadurch charakterisiert werden, daß durch sie das Funktional

$$\frac{\sup \mid h(s) \mid}{\inf \mid h(s) \mid}, \quad s \in D_s,$$

unter allen Abbildungen auf Ringgebiete der hier betrachteten Art minimalisiert wird[3]. Dabei ist angenommen, daß der Nullpunkt der Mittelpunkt der konzentrischen Kreisringe ist.

Wir betrachten nochmals den zur Ableitung von (11a, b) benützten Spezialfall zweier Punkte z_1, z_2 des Parallelstreifens mit gleichem Imaginärteil. Es sei

$$\Re z_1 = x_1, \ \Re z_2 = x_2, \ x_2 > x_1,$$

$$\Im z_1 = \Im z_2,$$

$\mathfrak{C}_z$ die n.e. Strecke von z_1 nach z_2, die hier mit der euklidischen Strecke übereinstimmt, $\mathfrak{C}_w$ die n.e. Strecke, welche die Bildpunkte w_1, w_2 von z_1, z_2 verbindet. Statt durch Umformung früherer Ergebnisse findet man wieder einfacher durch Integration

[3] Hierauf basiert ein sehr bekannter Existenzbeweis der Abbildung auf einen Kreisring. Siehe z. B. *L. Bieberbach:* Einführung in die konforme Abbildung. Berlin 1956, S. 164.

$$E(z_1; z_2) = \frac{\pi}{a} \int_{\mathfrak{C}_z} \frac{|\,dz\,|}{\sin \frac{\pi}{a}(x - m_x)} = ln \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2a}(x_2 - m_x)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2a}(x_1 - m_x)} \right],$$

$$E(w_1; w_2) = \frac{\pi}{b} \int_{\mathfrak{C}_w} \frac{|\,dw\,|}{\sin \frac{\pi}{b}(u - m_u)} \geqq \frac{\pi}{b} \left| \int_{\mathfrak{C}_w} \frac{du}{\sin \frac{\pi}{b}(u - m_u)} \right| =$$

$$= \left| ln \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2b}(u_2 - m_u)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2b}(u_1 - m_u)} \right] \right|,$$

wobei

$$u_1 = \Re w_1, \; u_2 = \Re w_2$$

bedeutet. Damit folgt wegen $E(z_1; z_2) \geqq E(w_1; w_2)$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2a}(x_2 - m_x)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2a}(x_1 - m_x)} \geqq \left\{ \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2b}(u_2 - m_u)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2b}(u_1 - m_u)} \right\}^{\delta} \tag{15}$$

mit dem Exponenten

$$\delta = \begin{cases} +1, \text{ falls } u_2 \geqq u_1, \\ -1, \text{ falls } u_2 < u_1. \end{cases}$$

Für die Funktionen (8) tritt in (15) das $=$ Zeichen ein.

Eine gröbere Abschätzung erhält man infolge

$$E(w_1; w_2) \geqq \frac{\pi}{b} \int_{\mathfrak{C}_w} |\,dw\,| \geqq \frac{\pi}{b} \,|\, u_2 - u_1 \,|:$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2a}(x_2 - m_x)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2a}(x_1 - m_x)} > e^{\frac{\pi}{b} |\, u_2 - u_1 \,|}.$$

Ungleichung (15) kann verallgemeinert werden:

Wir betrachten die Punkte z_1 der Strecke $\mathfrak{C}_{z_1}$,

$$\Re z_1 = x_1 = \text{const}, \; m_x < x_1 < M_x,$$

$$\Im z_1 = y_1, \; S_1 < y_1 < S_2,$$

$$S_1 = \text{const}, \quad S_2 = \text{const}.$$

Diese Strecke besitzt ein Bild $\mathfrak{C}_{w_1}$. Für die Punkte $z_1 \in \mathfrak{C}_{z_1}$ sei

$$M_1 = \sup \Re f(x_1 + iy_1),$$

$$m_1 = \inf \Re f(x_1 + iy_1).$$

Da $\mathfrak{C}_{w_1}$ kompakt im Parallelstreifen liegt, ist

$$m_u < m_1 \leqq M_1 < M_u. \tag{16a}$$

Zu jedem Punkt der zur Strecke $\mathfrak{C}_{z_1}$ parallelen Strecke $\mathfrak{C}_{z_2}$,

$$\Re z_2 = x_2 = \text{const}, \quad x_1 < x_2 < M_x,$$

$$\Im z_2 = y_2, \quad S_1 < y_2 < S_2,$$

gibt es einen Punkt auf der Strecke $\mathfrak{C}_{z_1}$ mit einer n.e. Minimalentfernung ϱ, nämlich denjenigen, der den gleichen Imaginärteil besitzt. Das Bild der Strecke $\mathfrak{C}_{z_2}$ sei $\mathfrak{C}_{w_2}$ und

$$M_2 = \sup \Re f(x_2 + iy_2),$$

$$m_2 = \inf \Re f(x_2 + iy_2)$$

für $z_2 \in \mathfrak{C}_{z_2}$, wobei

$$m_u < m_2 \leqq M_2 < M_u \tag{16b}$$

gilt. Dann folgt aus (15)

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2a}(x_2 - m_x)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2a}(x_1 - m_x)} \geqq \left\{ \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2b}(M_2 - m_u)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2b}(M_1 - m_u)} \right\}^{\delta}, \tag{17a}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2a}(x_2 - m_x)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2a}(x_1 - m_x)} \geqq \left\{ \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2b}(m_2 - m_u)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2b}(m_1 - m_u)} \right\}^{\delta} \tag{18a}$$

mit dem Exponenten

$$\delta = \begin{cases} +1, & \text{falls } M_2 \geqq M_1 \text{ bzw. } m_2 \geqq m_1, \\ -1, & \text{falls } M_2 < M_1 \text{ bzw. } m_2 < m_1. \end{cases}$$

Für $M_1 = M_2$ bzw. $m_1 = m_2$ ist der Beweis von (17a) bzw. (18a) trivial. Wir nehmen zunächst $M_2 > M_1$ an und beweisen (17a). Nach Definition der oberen Grenze gibt es einen Punkt $w_2^* = f(z_2^*)$, $z_2^* \in \mathfrak{C}_{z_2}$, $\Re w_2^* = u_2^*$, so daß für ein kleines, positives ε

$$\varepsilon \geqq M_2 - u_2^* \geqq 0$$

ist. Zu z_2^* gibt es auf $\mathfrak{C}_{z_1}$ einen Punkt $z_1^* = x_1 + i\,\Im z_2^*$ in der n.e. Entfernung ϱ. Dann gilt nach (15)

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2a}(x_2 - m_x)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2a}(x_1 - m_x)} \geqq \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2b}(u_2^* - m_u)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2b}(u_1^* - m_u)}, \quad u_1^* = \Re f(z_1^*).$$

Ferner ist zufolge (16a, b) und wegen $u_1^* \leqq M_1$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2b}(u_2^* - m_u)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2b}(u_1^* - m_u)} \geqq \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2b}(M_2 - m_u)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2b}(M_1 - m_u)} - \varepsilon R,$$

wobei R ein beschränktes Restglied bedeutet. Da ε beliebig klein sein kann, gilt

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2a}(x_2 - m_x)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2a}(x_1 - m_x)} \geqq \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2b}(M_2 - m_u)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2b}(M_1 - m_u)}.$$

Ein entsprechender Schluß kann für $M_1 > M_2$ sowie zum Beweise von (18a) durchgeführt werden.

Wird S_1 vergrößert oder S_2 verkleinert, so wachsen die Größen M_1, M_2, monoton, die Größen m_1, m_2 fallen monoton. Setzen wir $S_1 = -S_2 = \infty$ und gelten für die dann erhaltenen Werte M_1, M_2 bzw. m_1, m_2 *auch noch* die Ungleichungen (16a, b), so kann der vorherige Beweis unverändert durchgeführt werden, so daß (17a) und (18a) auch dann Gültigkeit behalten.

Schließlich können wir allen bisherigen Ergebnissen mit Hilfe des harmonischen Maßes eine gegenüber eineindeutigen konformen Abbildungen invariante Fassung geben, so daß sie also nicht nur für Parallelstreifen gelten:

Bezeichnet man die Gerade $x = M_x$ mit α_x, die Gerade $x = m_x$ mit β_x, so ist offenbar

$$\frac{1}{a}(x_1 - m_x) = \omega(z_1, \alpha_x) \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{a}(x_2 - m_x) = \omega(z_2, \alpha_x)$$

das jeweils konstante harmonische Maß der Punkte z_1 der Geraden $x = x_1$ bzw. der Punkte z_2 der Geraden $x = x_2$ bezüglich des Gebietes $m_x < x < M_x$. Ebenso ist bei Bezeichnung der Geraden $u = M_u$ mit α_w, $u = m_u$ mit β_w

$$\frac{1}{b}(u_1 - m_u) = \omega(w_1, \alpha_w) \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{b}(u_2 - m_u) = \omega(w_2, \alpha_w)$$

das harmonische Maß eines Punktes $w_1 = f(z_1)$ bzw. $w_2 = f(z_2)$ bezüglich des Gebietes $m_u < u < M_u$. Setzt man noch

$$\bar{\omega}(w_1, \alpha_w) = \frac{1}{b}(M_1 - m_u), \quad \bar{\omega}(w_2, \alpha_w) = \frac{1}{b}(M_2 - m_u), \quad \text{bzw.}$$

$$\underline{\omega}(w_1, \alpha_w) = \frac{1}{b}(m_1 - m_u), \quad \underline{\omega}(w_2, \alpha_w) = \frac{1}{b}(m_2 - m_u),$$

wobei nach dem Vorherigen stets

$$\bar{\omega}(w_1, \alpha_w), \ \bar{\omega}(w_2, \alpha_w) < 1,$$
$$\underline{\omega}(w_1, \alpha_w), \ \underline{\omega}(w_2, \alpha_w) > 0$$

angenommen wird, und berücksichtigt man die allgemeine Beziehung

$$\omega(z, \alpha_z) = 1 - \omega(z, \beta_z),$$

so lautet die invariante Fassung von (17a) und (18a)

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\omega(z_2, \alpha_z)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\omega(z_1, \alpha_z)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\omega(z_1, \beta_z)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\omega(z_2, \beta_z)} \geqq \begin{cases} \left\{\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\bar{\omega}(w_2, \alpha_w)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\bar{\omega}(w_1, \alpha_w)}\right\}^{\delta} = \left\{\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\bar{\omega}(w_1, \beta_w)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\bar{\omega}(w_2, \beta_w)}\right\}^{\delta} & (17b) \\ \left\{\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\underline{\omega}(w_2, \alpha_w)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\underline{\omega}(w_1, \alpha_w)}\right\}^{\delta} = \left\{\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\underline{\omega}(w_1, \beta_w)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\underline{\omega}(w_2, \beta_w)}\right\}^{\delta} & (18b) \end{cases}$$

mit

$$\delta = \begin{cases} +1, & \text{falls } \bar{\omega}(w_2, \alpha_w) \geqq \bar{\omega}(w_1, \alpha_w) \text{ bzw. } \underline{\omega}(w_2, \alpha_w) \geqq \underline{\omega}(w_1, \alpha_w), \\ -1, & \text{falls } \bar{\omega}(w_2, \alpha_w) < \bar{\omega}(w_1, \alpha_w) \text{ bzw. } \underline{\omega}(w_2, \alpha_w) < \underline{\omega}(w_1, \alpha_w). \end{cases}$$

Wir gehen zu einigen Spezialisierungen der Ungleichungen (17a) und (18a) über. Wir betrachten zur Vereinfachung der Darstellung nur den Fall $M_2 \geqq M_1$, $m_2 \geqq m_1$.

Es sei

$$\frac{1}{a}(x_1 - m_x) \geqq \frac{1}{b}(M_1 - m_u), \tag{19a}$$

dann gilt wegen der Monotonie der tg-Funktion nach (17a) auch

$$\frac{1}{a}(x_2 - m_x) \geqq \frac{1}{b}(M_2 - m_u). \tag{19b}$$

Ebenso kann aus

$$\frac{1}{a}(x_1 - m_x) \geqq \frac{1}{b}(m_1 - m_u) \tag{20a}$$

auf

$$\frac{1}{a}(x_2 - m_x) \geqq \frac{1}{b}(m_2 - m_u) \tag{20b}$$

geschlossen werden. Gilt in (19a) das Gleichheitszeichen, so folgt durch Differenzbildung und Elimination von $\frac{a}{b}$ aus (19a) und (19b)

$$\frac{x_2 - x_1}{M_x - x_1} \geqq \frac{M_2 - M_1}{M_u - M_1} \tag{19c}$$

in Übereinstimmung mit dem Dreikreisesatz[4], aber auch

$$\frac{x_2 - x_1}{x_2 - m_x} \geqq \frac{M_2 - M_1}{M_2 - m_u}. \tag{19d}$$

Entsprechende Resultate können für den Fall des Gleichheitszeichens in (20a) hergeleitet werden.

Weiterhin vollziehen wir bei festem M_x, M_u den Grenzübergang $m_x, m_u \to -\infty$. Wir schreiben dazu (17a) in der Form

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2a}(M_x - x_1)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2a}(M_x - x_2)} \geqq \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2b}(M_u - M_1)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2b}(M_u - M_2)}$$

und finden für $\frac{1}{a} \to 0, \frac{1}{b} \to 0$ für die Grenzwerte

[4] Der *Hadamard*sche Dreikreisesatz wurde von *G. Doetsch* für den absoluten Betrag einer regulären Funktion auf einer Geraden in einem Parallelstreifen verallgemeinert. Die von *A. Ostrowski* und *F.* u. *R. Nevanlinna* herrührende allgemeine Fassung ist bei *R. Nevanlinna:* Eindeutige analytische Funktionen, Berlin 1953, S. 42 angegeben.

$$\frac{M_x - x_1}{M_x - x_2} \geqq \frac{M_u - M_1}{M_u - M_2}.$$

Durch Umformung erhält man hieraus wie zu erwarten wieder die Aussage des Dreikreisesatzes:

$$\frac{x_2 - x_1}{M_x - x_1} \geqq \frac{M_2 - M_1}{M_u - M_1}. \tag{21}$$

Nun lassen wir bei festem m_x und m_u M_x und $M_u \to \infty$ gehen und erhalten für die Grenzwerte

$$\frac{x_2 - m_x}{x_1 - m_x} \geqq \frac{M_2 - m_u}{M_1 - m_u},$$

woraus durch Umformung

$$\frac{x_2 - x_1}{x_2 - m_x} \geqq \frac{M_2 - M_1}{M_2 - m_u} \tag{22}$$

folgt.

Zu (21) und (22) analoge Ergebnisse können aus (18a) hergeleitet werden.

Bisher sind keine Stetigkeits- oder Differenzierbarkeitsannahmen für die Randwerte der Funktionen $w = f(z)$ gemacht worden. Nun untersuchen wir in Analogie zum *Julia*schen Satz Ungleichung (15) für $x_2 \to M_x$ bzw. $x_1 \to m_x$ und benötigen hierzu Aussagen über die Randwerte. Wir nehmen dabei $u_2 \geqq u_1$ an. Es sei

$$\limsup_{x_2 \to M_x} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2b}(u_2 - m_u)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2a}(x_2 - m_x)} = \Gamma_{z_1},$$

$$\liminf_{x_1 \to m_x} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2b}(u_1 - m_u)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2a}(x_1 - m_x)} = \gamma_{z_2}.$$

Γ_{z_1} ist nicht negativ und, wie aus (15) folgt, endlich. γ_{z_2} ist positiv. Man findet

$$\Gamma_{z_1} = \limsup_{x_2 \to M_x} \frac{b}{a} \frac{M_x - x_2}{M_u - u_2},$$

oder, falls $u(x+iy_1)$ am Rande $x=M_x$ differenzierbar ist,

$$\Gamma_{z_1}=\frac{b}{a}\frac{1}{\left\{\frac{du(x+iy_1)}{dx}\right\}_{x=M_x}}.$$

Entsprechend ist

$$\gamma_{z_2}=\lim_{x_1\to m_x}\inf\frac{a}{b}\frac{u_1-m_u}{x_1-m_x},$$

oder, falls $u(x+iy_2)$ am Rande $x=m_x$ differenzierbar ist,

$$\gamma_{z_2}=\frac{a}{b}\left\{\frac{du(x+iy_2)}{dx}\right\}_{x=m_x}.$$

Nach (15) gilt also

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2b}(u_1-m_u)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2a}(x_1-m_x)}\geqq\Gamma_{z_1}, \tag{23}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2b}(u_2-m_u)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2a}(x_2-m_x)}\leqq\gamma_{z_2}. \tag{24}$$

Nun sei für die Kurven $\mathfrak{C}_{z_1}$, $\mathfrak{C}_{z_2}$, die in den Voraussetzungen von (17a) und (18a) definiert sind,

$$\Gamma=\sup\Gamma_{z_1},\ z_1\in\mathfrak{C}_{z_1},$$
$$\gamma=\inf\gamma_{z_2},\ z_2\in\mathfrak{C}_{z_2},$$

wobei auch S_1, $-S_2=\infty$ zugelassen ist. Dann gelten die Ungleichungen

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2b}(M_1-m_u)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2a}(x_1-m_x)}\geqq\Gamma, \tag{25}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2b}(m_2-m_u)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2a}(x_2-m_x)}\leqq\gamma, \tag{26}$$

wobei M_1, m_2 dieselbe Bedeutung wie in (17a) und (18a) haben. Beweis: Auf $\mathfrak{C}_{z_1}$ gibt es einen Punkt z_1^*, so daß nach (23)

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2b}(\Re f(z_1^*) - m_u)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2a}(x_1 - m_x)} \geqq \Gamma - \varepsilon$$

ist, für eine beliebig klein vorgegebene positive Zahl ε. Ferner ist $\Re f(z_1^*) \leqq M_1$. Daraus folgt (25). Entsprechend gibt es auf $\mathfrak{C}_{z_2}$ einen Punkt z_2^*, so daß nach (24)

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2b}(\Re f(z_2^*) - m_u)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2a}(x_2 - m_x)} \leqq \gamma + \varepsilon$$

ist. Wegen $\Re f(z_2^*) \geqq m_2$ folgt daraus (26). Läßt man nun die Indizierung weg, so kann man aus (25) und (26) für die obere und untere Grenze der Funktionswerte auf einer Geraden $\Re z = x = \text{const}$, $m_x < x < M_x$, $S_1 < y < S_2$, auf

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2a}(m - m_u) \leqq \gamma \operatorname{tg}\frac{\pi}{2b}(M - m_u) \tag{27}$$

schließen mit

$$M = \sup \Re f(z),\ m = \inf \Re f(z)$$

für die Punkte z der oben bezeichneten Strecke.

Der Grenzfall, daß der innere Punkt z_1 gegen den inneren Punkt z_2 konvergiert, bringt natürlich nichts Neues, sondern führt wieder zu Ungleichung (6).

Zur Topologie der Abbildungen dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten

Von

Josef Weier, Fulda

(Eingegangen am 3. September 1957)

Sind P, Q geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeiten, P dreidimensional, Q zweidimensional, a ein Punkt aus Q und F eine Homotopieklasse stetiger Abbildungen von P in Q, so liegt in F eine Abbildung f derart, daß die Menge $f^{-1}(a)$ aus endlich vielen paarweis zueinander fremden doppelpunktfreien geschlossenen Streckenzügen besteht. Seien K eine simpliziale Zerlegung von $f^{-1}(a)$, ferner $A_1, A_2, \ldots$ die 1-Simplexe von K und α_i die unten erklärte Vielfachheit modulo 2 von A_i bei (f, a).

Wenn P und Q orientierbar sind, so sei x_i eine Orientierung von A_i und β_i die unten definierte Multiplizität von x_i bei (f, a). Setzt man

$$x_\alpha = \Sigma\, \alpha_i\, A_i \text{ und } x_\beta = \Sigma\, \beta_i\, x_i,$$

so ist x_α ein Zyklus modulo 2 und x_β ein ganzzahliger Zyklus. Und es gilt:

Ist F eine unwesentliche Homotopieklasse, liegt also in F eine Abbildung f' mit $f'(P) \neq Q$, so ist

$$x_\alpha \sim 0 \text{ modulo } 2$$

in bezug auf die Mannigfaltigkeit P. Sind P, Q orientierbar und F unwesentlich, so ist $x_\beta \sim 0$ in bezug auf P und den Bereich der ganzen Zahlen.

Weiter seien S eine 3-Sphäre, T eine 2-Sphäre, q ein Punkt aus T, Φ eine Homotopieklasse stetiger Abbildungen von S in T und φ eine bestimmte Abbildung aus Φ. Die Menge $\varphi^{-1}(q)$ bestehe aus endlich vielen paarweis zueinander fremden doppelpunktfreien geschlossenen Streckenzügen $B_1, B_2, \ldots$ Für alle i seien B_i^2 ein offenes 2-Simplex und b_i^2 eine Orientierung von B_i^2. Bezeichne σ_i eine stetige Abbildung von $\overline{B}_i^2$ in S, so daß $\sigma_i \big| \overline{B}_i^2 - B_i^2$ eineindeutig und

$$\sigma_i(\overline{B}_i^2 - B_i^2) = B_i.$$

Es wird also in jedes B_i das stetige Bild eines 2-Simplexes eingespannt. Schließlich seien b_i die von $\sigma_i(b_i^2)$ in B_i induzierte Orientierung und t eine Orientierung von T. Hierauf gilt:

Es bezeichne γ_i den Brouwerschen Grad der Abbildung $\varphi\,\sigma_i : b_i^2 \to t$ und δ_i die Multiplizität von b_i bei (φ, q). Ist dann

$$\Sigma\,\gamma_i\,\delta_i = 0,$$

so stellt Φ eine unwesentliche Abbildungsklasse dar.

Sind F_1, F_2 zwei Homotopieklassen stetiger Abbildungen von P in Q, so liegt in F_1 eine Abbildung f_1 und in F_2 eine Abbildung f_2 derart, daß die Menge aller Punkte p aus P mit $f_1(p) = f_2(p)$ ein endliches Polyeder C einer Dimension ≤ 1 ist. Seien L eine simpliziale Zerlegung von C und $y_1, y_2, \ldots$ die mit einer Orientierung versehenen 1-Simplexe aus L. Dann gilt:

Wenn P, Q orientierbar und ε_i die Multiplizität von y_i bei (f_1, f_2), so ist $y = \Sigma\,\varepsilon_i\,y_i$ ein ganzzahliger Zyklus. Wenn überdies

$$F_1 = F_2 \text{ und } y \sim 0,$$

so liegen in F_1 Abbildungen g_1, g_2 derart, daß $g_1(p) \neq g_2(p)$ in allen Punkten p aus P.

In der vorliegenden Arbeit wird nur nachgewiesen, daß die Abbildungen f_1, f_2 existieren und daß die ganzzahlige 1-Kette $\Sigma\,\varepsilon_i\,y_i$ ein Zyklus ist. Die übrigen Ergebnisse werden in einer Fortsetzung hergeleitet.

1. Erläuterungen und Ergänzungen

Für diesen ganzen Abschnitt bezeichnen P eine dreidimensionale und Q eine zweidimensionale orientierbare geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit, P^* eine Orientierung von P und Q^* eine Orientierung von Q.

Wenn f_1, f_2 stetige Abbildungen von P in Q und A die Menge aller Punkte p aus P mit $f_1(p) = f_2(p)$, so heiße A auch kurz der „Schnitt" von f_1 und f_2. Wie üblich ist, wenn B Teilmenge eines Euklidischen Raumes E, $\overline{B}$ die abgeschlossene Hülle von B bezüglich E. Die weiterhin auftretenden „Simplexe" sind offen und gradlinig. Wenn C ein solches Simplex und φ eine eineindeutige simpliziale Abbildung von $\overline{C}$ in E, so heiße $\varphi(C)$ eine „Zelle" und $\varphi(\overline{C} - C)$ eine „Sphäre". Wenn a, b Punkte aus E, so bedeute $d(a, b)$ den Abstand dieser Punkte. Es sei $d(B)$ der Durchmesser von B.

Seien $m > n$ natürliche Zahlen, A ein m-Simplex, B ein $(m-n)$-Simplex in A, p_0 ein Punkt aus B und C ein n-Simplex in A mit $p_0 \in C$ und $\overline{B} \,.\, (\overline{C} - p_0) = 0$. Weiter seien $p_1, \ldots, p_m$ Punkte mit

$$p_i \in B \text{ für } i \leq m - n \text{ und } p_i \in C \text{ für } i > m - n$$

derart, daß die Punkte $p_0, \ldots, p_n$ linear unabhängig. Sind dann A^* die von $(p_0, \ldots, p_n)$ in A, weiter B^* die von $(p_0, \ldots, p_{m-n})$ in B und C^* die von $(p_0, p_{m-n+1}, \ldots, p_m)$ in C induzierte Orientierung, so heiße C^* auch die „von (A^*, B^*) in C induzierte Orientierung".

Zur Erklärung von Vielfachheit und Multiplizität seien nun $m > n$ natürliche Zahlen, M eine m-dimensionale und N eine n-dimensionale Euklidische Mannigfaltigkeit, A ein $(m-n)$-dimensionales endliches Polyeder in M, K eine simpliziale Zerlegung von A, B ein $(m-n)$-Simplex aus K, weiter f, f' stetige Abbildungen von M in N mit A als Schnitt und q ein Punkt aus B. Dann existieren n-Simplexe C, D mit

$$q \in C \subset M,\ A \,.\, (\overline{C} - q) = 0,\ f(C) + f'(C) \subset D \subset N.$$

Für $p \in \overline{C} - C$ sei $\varphi(p)$ die Projektion von $f(p)$ auf $\overline{D} - D$ aus $f'(p)$. Wenn nunmehr $\pm\beta$ die beiden Brouwerschen Grade (vergleiche etwa [1] und [2]) der Abbildung $\varphi : \overline{C} - C \to \overline{D} - D$ sind, so heiße β mod 2 die „*Vielfachheit*" modulo 2 von B bei (f, f'). Hierauf möge M eine Orientierung M^* und N eine Orientierung N^* besitzen. Es seien B^* eine Orientierung von B, C^* die von (M^*, B^*) in C und D^* die von N^* in D induzierte Orientierung, ferner C' die von C^* in $\overline{C} - C$ und D' die von D^* in $\overline{D} - D$ induzierte Orientierung. Dann heiße der Grad der Abbildung $\varphi : C' \to D'$ die „*Multiplizität*" von B^* bei (f, f', M^*, N^*).

Sind f, g, h stetige Abbildungen von P in Q und $h(P)$ ein Punkt a aus Q, so ist die Multiplizität bezüglich (f, g) näherhin die Multiplizität bezüglich (f, g, P^*, Q^*), die Multiplizität bezüglich (f, a) genauer die Multiplizität bezüglich (f, h, P^*, Q^*). Seien A ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 in P, ferner A der Schnitt von (f, g) und K eine simpliziale Zerlegung von A. Sofern $\dim A = 1$, seien $x_1, x_2, \ldots$ die mit einer Orientierung versehenen 1-Simplexe von K und α_i die Multiplizität von x_i bei (f, g); hier heiße $\Sigma\, \alpha_i\, x_i$ eine „*charakteristische Kette*" von (f, g). Wenn $\dim A < 1$, so sei die Zahl Null die charakteristische Kette von (f, g).

Satz 1. *Sind F_1, F_2 Homotopieklassen stetiger Abbildungen von P in Q, so liegt in F_1 eine Abbildung f_1 und in F_2 eine Abbildung f_2 derart, daß der Schnitt von f_1 und f_2 ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 ist.*

Eine Verschärfung des vorstehenden Satzes findet sich im zweiten Abschnitt bewiesen. Im dritten Abschnitt wird der folgende Satz verallgemeinert.

Satz 2. *Sind f_1, f_2 stetige Abbildungen von P in Q, der Schnitt von f_1, f_2 ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 und x eine charakteristische Kette von (f_1, f_2), so ist $\dot{x} = 0$.*

Die in Satz 2 in Rede stehende Kette heiße auch ein *„charakteristischer Zyklus"* von (f_1, f_2). Man bestätigt sofort:

Satz 3. *Sind f_1, f_2 stetige Abbildungen von P in Q und der Schnitt von (f_1, f_2) ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1, so sind alle charakteristischen Zyklen von (f_1, f_2) untereinander homolog in bezug auf P und die ganzen Zahlen.*

Zu der Frage, ob die Umkehrung des in der Einleitung angeführten Satzes über Abbildung von 3-Sphären in 2-Sphären richtig ist, gibt der nachstehende Satz einen einfacheren Anhaltspunkt.

Satz 4. *Seien S eine 3-Sphäre, T eine 2-Sphäre, q ein Punkt aus T und X ein 2-Simplex in S. Dann existiert eine unwesentliche Abbildung f von S in T mit*

$$f^{-1}(q) = \overline{X} - X$$

und der Eigenschaft, daß der Grad der Abbildung $f \mid \overline{X} \to T$ von Null verschieden ist.

Beweis. Seien E der 3-dimensionale Euklidische Raum, a ein Punkt aus E, A die Menge aller Punkte p aus E mit $d(p, a) = 1$, ferner b, c antipodische Punkte auf A, E_2 die Ebene durch a senkrecht auf $\overline{bc}$, B die offene 2-dimensionale Vollkugel in E_2 mit a als Mittelpunkt und 1 als Radius.

Für $p \in \overline{B} - a$ bedeute $C(p)$ die Projektion von $\overline{bp} + \overline{pc}$ auf A mit a als Projektionszentrum. Für $p \in E$ sei $x(p)$ derjenige Punkt in $\overline{B}$, der von p den kleinsten Abstand hat. Es bezeichne D ein 3-Simplex in E mit $\overline{B} \subset D$.

Wir setzen $\varphi(a) = b$ und $\varphi(\overline{B} - B) = c$. Wenn p ein Punkt aus $B-a$, so sei $\varphi(p)$ der durch die Beziehung

$$d(b, \varphi(p)) = 2\, d(a, p)$$

bestimmte Punkt auf $C(p)$. Offenbar ist die Abbildung $\varphi \mid B$ topologisch. Der Grad der Abbildung $\varphi : \overline{B} \to A$ ist von Null verschieden.

Für $p \in \overline{B}-a$ und $0 \leq \tau \leq 1$ sei $\varphi(p, \tau)$ derjenige Punkt auf $C(p)$, der von b den Abstand $\tau\, d(b, \varphi(p))$ hat. Für $0 \leq \tau \leq 1$ sei $\varphi(a, \tau) = b$. In allen Punkten p aus E sei

$$\zeta(p) = d(p, E-D)/(d(p, E-D) + d(p, B)).$$

Mit Hilfe von x, φ und ζ wollen wir nun eine Abbildung $g: E \to A$ definieren. Es sei $g(p) = \varphi(x(p), \zeta(p))$ für alle $p \in E$. Offenbar ist g eine stetige Abbildung von E in A.

Für $p \in \overline{B}$ ist $x(p) = p$ und $\zeta(p) = 1$, daher $g(p) = \varphi(p, 1) = \varphi(p)$. Aus $g(p) = \varphi(p)$, $p \in \overline{B}$, folgt, daß $(g \mid \overline{B})^{-1}(c) = \overline{B}-B$. Zum Beweis, daß

$$g^{-1}(c) = \overline{B}-B,$$

bedeute p einen Punkt aus $E-\overline{B}$. Dann ist $\zeta(p) < 1$. Nach der Erklärung von φ ist $\varphi(q, \tau) \neq c$ für alle (q, τ) mit $q \in \overline{B}$ und $\tau < 1$. Mithin $g(p) \neq c$. Schließlich kann man g unter Festhaltung auf $E-D$ in den Punkt b deformieren. Hierzu sei

$$g^{\tau}(p) = \varphi(x(p), (1-\tau)\zeta(p))$$

für alle (p, τ). Dann ist $g^0 = g$. In allen p ist $g^1(p) = \varphi(x(p), 0) = b$.

Mit Hilfe von g läßt sich f leicht angeben. Es bedeute d einen Punkt aus S und t eine topologische Abbildung von $S-d$ auf E derart, daß $t(X) = B$. Ferner sei t' eine topologische Abbildung von A auf T mit $t'(c) = q$. Dann braucht man nur $f(p) = t'gt(p)$ für $p \in S-d$ und $f(d) = t'(b)$ zu setzen.

2. Existenz eindimensionaler Schnitte

Sind E ein Euklidischer Raum, ferner $A_1, A_2, \ldots$ in E gelegene Simplexe und ist jeder Punkt aus E zu fast allen A_i fremd, so heiße $\Sigma \overline{A}_i$ ein „Polyeder". Dieses letztere Polyeder ist „endlich" oder „unendlich", je nachdem sein Durchmesser endlich oder nicht.

Satz 5. *Seien M, N geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeiten, dim $M = (\dim N) + 1 > 1$, ε eine positive Zahl und f, g stetige Abbildungen von M in N. Dann existiert eine zu g homotope Abbildung γ von M in N mit $d(g, \gamma) < \varepsilon$ derart, daß der Schnitt von f, γ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 ist.*

Beweis. Sind n die Dimension von N, K eine simpliziale Zerlegung von M, ferner $A_1^i, A_2^i, \ldots$ für $i = -1, 0, \ldots, n+1$ die i-Simplexe von K und ist K nur hinreichend fein, so gilt: zu jedem $\overline{A}_k^i$, das einen Punkt p mit $f(p) = g(p)$ enthält, existiert eine n-Zelle B_k^i in Q mit

$$f(\overline{A}_k^i) + g(\overline{A}_k^i) \subset B_k^i \text{ und } d(B_k^i) < \varepsilon.$$

Weiter gibt es eine positive Zahl ζ, so daß, wenn dem Simplex A_k^i keine Zelle B_k^i zugeordnet ist,

$$d(f(p),\ g(p)) > \zeta \text{ für alle } p \in \overline{A}_k^i.$$

Bedeute nun j eine der Zahlen $-1, 0, \ldots, n-1$.

Wir machen die für $j = -1$ richtige Annahme, es existiere eine zu g homotope Abbildung g^j von M in N mit den Eigenschaften:

$$f(p) \neq g^j(p) \text{ für } p \in \Sigma_{k=-1}^{j} \Sigma_i \overline{A}_k^i,$$
$$f(\overline{A}_k^i) + g^j(\overline{A}_k^i) \subset B_k^i$$

für alle B_k^i, schließlich $d(g, g^j) < \min(\varepsilon, \zeta)$.

Hierauf gibt es eine positive Zahl η, die die Eigenschaft hat: wenn g' eine stetige Abbildung von M in N mit $d(g, g') < \eta$, so ist $f(\overline{A}_k^i) + g'(\overline{A}_k^i) \subset B_k^i$ für alle (i, k), in denen B_k^i definiert.

Weiter existiert zu jedem B_k^{j+1} eine $(n+1)$-Zelle C_k derart, daß die $C_1, C_2 \ldots$ paarweis zueinander fremd und ferner gilt:

$$A_k^{j+1} \subset C_k \subset M, \quad f(\overline{C}_k) + g^j(\overline{C}_k) \subset B_k^{j+1},$$

alle $\overline{A}_r^i$ mit $i \leq j$ sind zu C_k fremd. Alsdann wende man den nachstehenden Hilfssatz auf jedes C_k an.

Dieser Hilfssatz liefert, wenn $j = n-1$ ist, eine zu g homotope Abbildung g^n von M in N, die die Eigenschaften hat:

$$f(p) \neq g^n(p) \text{ für fast alle } p \in \Sigma(\overline{A}_k^{n+1} - A_k^{n+1}),$$

für alle B_k^{n+1} gilt $f(\overline{A}_k^{n+1}) + g^n(\overline{A}_k^{n+1}) \subset B_k^{n+1}$, es ist $d(g, g^n) < \min(\varepsilon, \zeta)$.

Wegen $d(B_k^{n+1}) < \varepsilon$ und $g(\overline{A}_k^{n+1}) \subset B_k^{n+1}$ verbleibt nur noch der Nachweis: sind A ein $(n+1)$-Simplex, B der n-dimensionale Euklidische Raum, ferner φ, γ^n stetige Abbildungen von $\overline{A}$ in B und gilt $\varphi(p) \neq \gamma^n(p)$ für fast alle Punkte p aus $\overline{A}-A$, so existiert eine stetige Abbildung γ^* von $\overline{A}$ in B mit $\gamma^n \mid \overline{A}-A = \gamma^* \mid \overline{A}-A$ derart, daß der Schnitt von φ, γ^* ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 ist.

Das ist leicht einzusehen. Es seien q ein Punkt aus A und $\gamma^*(q) = \varphi(q)$; für $p \in \overline{A}-q$ weiter $w(p)$ die Projektion von p auf $\overline{A}-A$ aus q, $\lambda(q)$ die Zahl $d(p, q)/(d(p, q) + d(p, \overline{A}-A))$ und $\gamma^*(p)$ der Punkt $\varphi(p) + \lambda(p)$ $(\gamma^n w(p) - \varphi w(p))$.

Hilfssatz. Seien n eine natürliche Zahl, j eine Zahl mit $0 \leq j \leq n$, S ein $(n+1)$-Simplex, T ein n-Simplex, A ein in S gelegenes j-Simplex, ε eine positive Zahl und f, g stetige Abbildungen von $\overline{S}$ in T mit

$$f(p) \neq g(p) \text{ für } p \in \overline{A}-A.$$

Dann existiert eine stetige Abbildung γ von $\overline{S}$ in T mit $g \mid \overline{S}-S = \gamma \mid \overline{S}-S$ und $d(g, \gamma) < \varepsilon$ derart, daß gilt: wenn $j < n$, so ist $f(p) \neq \gamma(p)$ für alle Punkte p aus $\overline{A}$; wenn $j = n$, so ist $f(p) \neq \gamma(p)$ für fast alle $p \in \overline{A}$.

Beweis. Durch Differenzbildung $f-g$ reduziert sich der vorstehende Hilfssatz auf die Aussage: sind E der n-dimensionale Euklidische Raum, q der Nullpunkt von E und φ eine stetige Abbildung von $\overline{S}$ in E mit $\varphi(\overline{A}-A) \subset E-q$, so existiert eine stetige Abbildung φ' von $\overline{S}$ in E mit $\varphi \mid \overline{S}-S = \varphi' \mid \overline{S}-S$ und $d(\varphi, \varphi') < \varepsilon$ derart, daß $\varphi'(A) \subset E-q$ für $j < n$ und $(\varphi' \mid A)^{-1}(q)$ endlich für $j = n$.

Bedeutet φ^* eine stetige Abbildung von $\overline{A}$ in E mit $\varphi \mid \overline{A}-A = \varphi^* \mid \overline{A}-A$, $d(\varphi \mid \overline{A}, \varphi^*) < \varepsilon$, $\varphi^*(\overline{A}) \subset E-q$ für $j < n$ und endlichem $(\varphi^*)^{-1}(q)$ für $j = n$, so existiert nach einem bekannten Fortsetzungstheorem (vergleiche [8]) eine stetige Abbildung φ^{**} von $\overline{S}$ in E mit $\varphi^{**} \mid \overline{A} = \varphi^*$ und $\varphi^{**} \mid \overline{S}-S = \varphi \mid \overline{S}-S$.

Offenbar existiert eine positive Zahl ζ mit $0 < \zeta < \varepsilon$, so daß der Abstand $d(\varphi(p), \varphi^{**}(p)) < \zeta$ für $p \in A + (\overline{S}-S)$. Hierauf sei $\varphi'(p)$ gleich $\varphi^{**}(p)$, wenn $d(\varphi(p), \varphi^{**}(p)) \leq \zeta$; sonst jener Punkt auf dem Halbstrahl aus $\varphi(p)$ durch $\varphi^{**}(p)$, der von $\varphi(p)$ den Abstand ζ hat.

Verbleibt, die Existenz von φ^* nachzuweisen. Hierzu sei $j > 0$. Dann gibt es ein j-Simplex B mit $\overline{B} \subset A$ und eine positive Zahl α, so daß

$$d(q, \varphi(p)) > \alpha \text{ für } p \in \overline{A}-B.$$

Dann läßt sich leicht eine simpliziale Abbildung σ von $\overline{A}$ in E angeben mit $d(\varphi, \sigma) < \min(\alpha, \varepsilon)$ derart, daß $\sigma(\overline{A}) \subset E-q$ für $j < n$ und $\sigma^{-1}(q)$ endlich für $j = n$. Hierauf kann man $\lambda(p) = d(p, B)/(d(p, B) + d(p, \overline{A}-A))$ und $\varphi^* = \lambda\varphi + (1-\lambda)\sigma$ setzen.

3. Der zyklische Charakter eindimensionaler Schnitte

Im Gegensatz zum letzten Abschnitt werden hier Urbild- und Bildmannigfaltigkeit als orientierbar vorausgesetzt. Wir wollen zeigen:

Satz 6. *Seien M, N orientierbare geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeiten mit dim M = (dim N) + 1 > 1, ferner A ein eindimensionales endliches Polyeder in M und f, g stetige Abbildungen von M in N mit A als Schnitt. Dann ist jede charakteristische Kette von (f, g) ein ganzzahliger Zyklus.*

Beweis. Sind M^* eine Orientierung von M, N^* eine solche von N, K eine simpliziale Zerlegung von A und x eine orientiertes 1-Simplex aus K, so bezeichne $\mu(x)$ die Multiplizität von x bezüglich (f, g, M^*, N^*). Ist dann a ein Eckpunkt von K, so genügt es wegen $\mu(-x) = -\mu(x)$, die folgenden Aussagen (1) und (2) nachzuweisen.

(1). Sind $A_1, \ldots, A_m$, $m > 1$, die 1-Simplexe aus K mit a als Eckpunkt und a_i der Eckpunkt $\neq a$ von A_i, so gilt

$$\mu(x_1) = \Sigma_{i>1}\, \mu(x_i),$$

wobei x_1 die Orientierung $a_1 \to a$ von A_1 und x_i für $i > 1$ die Orientierung $a \to a_i$ von A_i.

(2). Wenn in K nur ein 1-Simplex mit a als Eckpunkt liegt und y eine Orientierung dieses 1-Simplexes bezeichnet, so ist $\mu(y) = 0$.

Beweis von (1). Offenbar gibt es in M von τ stetig abhängende n-Zellen B^τ, $0 \leq \tau \leq 1$, derart, daß $A.(\overline{B}^\tau - B^\tau) = 0$ für alle τ, ferner $A.B^0 = a_1$ und $A.B^1$ aus den Punkten $a_2, \ldots, a_m$ besteht. Seien $C_2, \ldots, C_m$ paarweis zueinander fremde n-Zellen in B^1 mit $a_i \in C_i$ für alle i. Weiter seien

$\omega(B^0)$ die von (M^*, x_1) in B^0 nach einer Erklärung aus Abschnitt 1,

$\omega(B^\tau)$ die von $\omega(B^0)$ vermöge $\{B^\sigma\}$ in B^τ,

$\omega(\overline{B}^\tau - B^\tau)$ die von $\omega(B^\tau)$ in $\overline{B}^\tau - B^\tau$,

$\omega(C_i)$ die von (M^*, x_i) in C_i,

$\omega(\overline{C}_i - C_i)$ die von $\omega(C_i)$ in $\overline{C}_i - C_i$

induzierte Orientierung. Die von $\omega(C_i)$ in B^1 induzierte Orientierung ist gleich $\omega(B^1)$.

Man kann fürs folgende annehmen, die B^τ und C_i seien Simplexe und es existiere ein n-Simplex D in N mit

$$f(\overline{B}^\tau) + g(\overline{B}^\tau) \subset D \text{ für alle } \tau.$$

Für $p \in \overline{B}^\tau - B^\tau$ sei $h^\tau(p)$ die Projektion von $f(p)$ auf $\overline{D} - D$ aus $g(p)$. Für $p \in \overline{C}_i - C_i$ sei $h_i(p)$ die Projektion von $f(p)$ auf $\overline{D} - D$ aus $g(p)$.

Bedeuten dann $\omega(D)$ die von N^* in D und $\omega(\overline{D} - D)$ die von $\omega(D)$ in $\overline{D} - D$ induzierte Orientierung, ferner γ^τ den Grad der Abbildung

$$h^\tau : \omega(\overline{B}^\tau - B^\tau) \to \omega(\overline{D} - D)$$

und γ_i den Grad der Abbildung $h_i : \omega(\overline{C}_i - C_i) \to \omega(\overline{D} - D)$, so ist

$$\mu(x_1) = \gamma^0 = \gamma^1 = \Sigma\, \gamma_i = \Sigma_{i>1}\, \mu(x_i),$$

womit (1) bewiesen.

Beweis von (2). Es existieren in M von τ stetig abhängende n-Zellen E^τ, $0 \leq \tau \leq 1$, und in N eine n-Zelle F derart, daß $A\,.\,(\overline{E}^\tau - E^\tau) = 0$ für alle τ, ferner

$$A \,.\, E^0 = a,\ A \,.\, E^1 = 0 \text{ und } f(\overline{E}^\tau) + g(\overline{E}^\tau) \subset F \text{ für alle } \tau.$$

Fürs weitere kann man annehmen, F und die E^τ seien Simplexe. Bezeichne alsdann $w^\tau(p)$ für $p \in \overline{E}^\tau$ die Projektion von $f(p)$ auf $\overline{F}-F$ aus $g(p)$. Offenbar hat die Abbildung $w^1 : \overline{E}^1 - E^1 \to \overline{F}-F$ den Grad Null. Somit hat $w^0 : \overline{E}^0 - E^0 \to \overline{F}-F$ den Grad Null. Daher $\mu(y) = 0$, wie behauptet.

4. Andere Probleme aus der Topologie dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten

Die obigen Sätze handeln vornehmlich über Abbildungen dreidimensionaler in zweidimensionale Mannigfaltigkeiten. Der Fall, in dem die Bildmannigfaltigkeit dreidimensional, wird in einer Reihe älterer Arbeiten, so in [4], [7], [9] und [10], behandelt und ist in [3] nochmals von einer anderen Sicht her beleuchtet worden. Wenn die Bildmannigfaltigkeit eindimensional, so bieten sich, wie dies nicht anders erwartet werden kann, verschiedene Möglichkeiten an, die zugehörige Abbildungstheorie elementar aufzubauen.

Daneben steht die Gesamtheit jener Fälle, in denen die Bildmannigfaltigkeit eine Dimension größer als 3 hat. Diese Gesamtheit freilich ist gänzlich unübersehbar. Lediglich für einige Sonderfälle liegen Ergebnisse vor. So finden sich zum Beispiel in [5] die 3-dimensionalen Hurewiczschen Homotopiegruppen der n-dimensionalen Rotationsgruppen mit $n \geq 4$ berechnet. Und die durch [6] eingeleiteten Untersuchungen von Abbildungen der 3-dimensionalen Sphäre in n-dimensionale Sphären haben zu konkreten Ergebnissen geführt, wie man etwa [11] entnimmt.

Literatur

[1] *L. E. J. Brouwer*: Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. **71**, 97—115 (1912).

[2] *L. E. J. Brouwer*: Sur la notion de „classe" de transformations d'une multiplicité, Proc. 5th Intern. Math. Congr. Cambridge **2**, 9—10 (1912).

[3] *W. Franz*: Abbildungsklassen und Fixpunktklassen dreidimensionaler Linsenräume, Journal Reine Angew. Math. **185**, 65—77 (1943).

[4] *R. Furch*: Zur kombinatorischen Topologie des dreidimensionalen Raumes, Abhandlungen Math. Seminar Hamburg **3**, 237—245 (1923).

[5] *P. J. Hilton*: An introduction to homotopy theory, Cambridge Tracts Math. and Math. Physics **43**, 60 und 62 (1953).

[6] *H. Hopf*: Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre in die Kugelfläche, Math. Ann. **104**, 637—665 (1931).

[7] *H. Hotelling*: Three dimensional manifolds of states of motion, Trans. Amer. Math. Soc. **27**, 329—344 (1925).

[8] *W. Hurewicz* and *H. Wallman*: Dimension theory, Princeton Math. Series **4**, 82 (1948).

[9] *H. Kneser*: Eine Bemerkung über dreidimensionale Mannigfaltigkeiten, Göttinger Nachr. 128—130 (1925).

[10] *H. Seifert*, Topologie 3-dimensionaler gefaserter Räume, Acta Math. **60**, 147—238 (1932).

[11] *N. Steenrod*: The topology of fibre bundles, Princeton Math. Series **14**, 108 (1951).

Über die kleinste quadratfreie Zahl einer arithmetischen Reihe

Von

Karl Prachar, Wien

(Eingegangen am 25. September 1957)

Sei $Q(x, k, l)$ die Anzahl der quadratfreien natürlichen Zahlen $\leq x$, welche $\equiv l (\mathrm{mod}\, k)$ sind (k sei eine natürliche Zahl und $0 \leq l < k$). Wenn der größte gemeinsame Teiler $d = (k, l)$ nicht quadratfrei ist, so gibt es keine quadratfreien Zahlen, welche $\equiv l (\mathrm{mod}\, k)$ sind. *Landau*[1] hat bewiesen, daß

$$\lambda = \lambda(k, l) = \lim_{x \to \infty} Q(x, k, l) / x > 0$$

ist, sobald $d = (k, l)$ quadratfrei vorausgesetzt wird. *Wir beschränken uns in dieser Note der Einfachheit halber auf den Fall* $(k, l) = 1$ und untersuchen das Verhalten von $Q(x, k, l)$, wenn zugelassen wird, daß k mit x wächst. (Der Fall $(k, l) > 1$ bringt keine neuen Schwierigkeiten mit sich.) Wir beweisen zunächst die fast triviale Formel

$$Q(x, k, l) = A \frac{x}{k} + O(x^{1/4}), \quad A = \frac{6}{\pi^2} \prod_{p \mid k} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} \tag{1}$$

wobei jetzt die Konstanten in $O(\ )$ nicht von k abhängen sollen. Wenn mit $q_1(k, l)$ die kleinste quadratfreie Zahl bezeichnet wird, welche $\equiv l (\mathrm{mod}\, k)$ ist, so folgt aus dieser Formel sofort

$$q_1(k, l) < c\, k^2 \tag{2}$$

bei passendem $c > 0$. Wir beweisen dann die folgende Formel

$$Q(x, k, l) = A \frac{x}{k} + O(x^{1/2} k^{-1/4+\varepsilon} + k^{1/2+\varepsilon}). \qquad (\varepsilon > 0, \text{ beliebig}). \tag{3}$$

Aus dieser Formel ergibt sich an Stelle von (2) die bessere Schranke

[1] Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Leipzig und Berlin 1909, Bd. 2, S. 633—636.

$$q_1(k, l) < k^{3/4+\varepsilon}. \tag{4}$$

Beweis von (1):

Wir haben nach einer bekannten Formel für die *Möbius*sche μ-Funktion

$$Q(x, k, l) = \sum_{\substack{m \leq x \\ m \equiv l (\mathrm{mod}\, k)}} \mu^2(m) = \sum_{\substack{m \leq x \\ m \equiv l (\mathrm{mod}\, k)}} \sum_{d^2 \mid m} \mu(d) = \sum_{\substack{d^2 n \leq x \\ d^2 n \equiv l (\mathrm{mod}\, k)}} \sum \mu(d). \tag{5}$$

Aus $d^2 n \equiv l \pmod{k}$ folgt wegen der Annahme $(k, l) = 1$ insbesondere $(d, k) = 1$. Ferner ist bei festem d mit $(d, k) = 1$ die Lösung n dieser Kongruenz mod k eindeutig bestimmt, also die Anzahl der in Frage kommenden n bei festem d jedenfalls gleich $x/k\, d^2 + O(1)$, und wir erhalten für die Doppelsumme aus (5)

$$\sum_{\substack{d \leq x^{1/2} \\ (d, k)=1}} \mu(d) \left\{ \frac{x}{kd^2} + O(1) \right\} = \frac{x}{k} \sum_{\substack{d \leq x^{1/2} \\ (d, k)=1}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(x^{1/2}).$$

(1) folgt nun sofort wegen

$$\sum_{\substack{d \leq x^{1/2} \\ (d, k)=1}} \frac{\mu(d)}{d^2} = \sum_{\substack{d=1 \\ (d, k)=1}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\Big(\sum_{d > x^{1/2}} \frac{1}{d^2} \Big)$$

und

$$\sum_{\substack{d=1 \\ (d, k)=1}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \prod_{p \mid k} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} = \frac{1}{\zeta(2)} \prod_{p \mid k} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1}$$

wobei $\prod_p$ Produktbildung über alle Primzahlen bedeuten soll.

Beweis von (3):

Wir spalten die bei (5) erhaltene Doppelsumme folgendermaßen auf, wobei wir mit d stets zu k teilerfremde natürliche Zahlen bezeichnen wollen,

$$\sum_{\substack{d^2 n \leq x \\ d^2 n \equiv l (\mathrm{mod}\, k)}} \sum = \sum_{\substack{d \leq x^{1/2}\, k^{-1/4} \\ d^2 n \equiv l (\mathrm{mod}\, k)}} \sum + \sum_{\substack{d > x^{1/2}\, k^{-1/4} \\ d^2 n \equiv l (\mathrm{mod}\, k)}} \sum. \tag{6}$$

Für die erste Summe erhalten wir, ähnlich wie beim Beweis von (1)

$$\sum_{d \leq x^{1/2}\, k^{-1/4}} \mu(d) \left\{ \frac{x}{kd^2} + O(1) \right\} = \frac{x}{k} \{A + O(x^{-1/2}\, k^{1/4})\} + O(x^{1/2}\, k^{-1/4}) =$$

$$= A \frac{x}{k} + O(x^{1/2}\, k^{-1/4}). \tag{7}$$

Für die zweite Summe auf der rechten Seite von (6) gilt bei festem n

jedenfalls $d \leq (x/n)^{1/2}$, und aus $d > x^{1/2} k^{-1/4}$ ergibt sich $n < k^{1/2}$. Bei festem n ist die Restklasse von d^2 durch die Bedingung $d^2 n \equiv l \pmod k$ eindeutig mod k festgelegt, und wenn diese Kongruenz überhaupt lösbar ist, so hat sie $2^{\nu(k)}$ Lösungen $d \bmod k$ (wobei $\nu(k)$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von k bedeutet). Damit wird die zweite Summe aus (6)

$$O\Big(\sum_{n < k^{1/2}} 2^{\nu(k)} \{(x/n)^{1/2} k^{-1} + O(1)\}\Big) = O(2^{\nu(k)} \{x^{1/2} k^{-3/4} + k^{1/2}\}).$$

Dies zusammen mit (7) gibt wegen $\nu(k) = O(\log k/\log\log k)$ die Behauptung (3).

Für r-freie Zahlen ($r \geq 2$, ganz) läßt sich eine ganz ähnliche Formel herleiten. Die Anzahl solcher Zahlen $\leq x$, welche $\equiv l \pmod k$ sind, ist durch

$$\sum_{\substack{m \leq x \\ m \equiv l (\mathrm{mod}\ k)}} \sum_{d^r | m} \mu(d) = \sum_{\substack{d^r m \leq x \\ d^r m \equiv l (\mathrm{mod}\ k)}} \mu(d) \tag{8}$$

gegeben, wobei d unter der Annahme $(k, l) = 1$ wieder nur über die zu k teilerfremden Zahlen läuft. Die obige Doppelsumme teilen wir in zwei Teile: Wir setzen $y = x^{1/r} k^{-1/r^2}$ und finden für den ersten Teil

$$\sum_{d \leq y} \sum \mu(d) = \sum_{d \leq y} \mu(d) \left\{\frac{x}{kd^r} + O(1)\right\} = \frac{x}{k} \sum_{d \leq y} \frac{\mu(d)}{d^r} + O(y)$$

wobei

$$\sum_{d \leq y, (d, k) = 1} \frac{\mu(d)}{d^r} = \Pi_{p, p \nmid k} \left(1 - \frac{1}{p^r}\right) + O\Big(\sum_{d > y} \frac{1}{d^r}\Big) = \frac{1}{\zeta(r)} \Pi_{p | k} \left(1 - \frac{1}{p^r}\right)^{-1} + O(y^{-r+1}) \tag{9}$$

und die Konstanten in den O-Symbolen von r unabhängig sind. Für den zweiten Teil der Doppelsumme aus (8) erhalten wir

$$\Big|\sum_{d > y} \sum \mu(d)\Big| \leq r^{\nu(k)} \sum_{n < k^{1/r}} \{(x/n)^{1/r} k^{-1} + 1\} = O(r^{\nu(k)} \{x^{1/r} k^{-1/r^2 + 1/r - 1} + k^{1/r}\})$$

da bei festem n, $(n, k) = 1$ die Kongruenz $d^r n \equiv l \pmod k$ höchstens $r^{\nu(k)} \bmod k$ verschiedene Lösungen haben kann. Insgesamt erhalten wir für die Anzahl $Q^{(r)}(x, k, l)$ der r-freien Zahlen $\leq x$, welche $\equiv l \pmod k$ sind ($(l, k) = 1$) einen Ausdruck der Form

$$A_r \frac{x}{k} + O(r^{\nu(k)} \{x^{1/r} k^{-1/r^2} + k^{1/r}\})$$

wobei $A_r = 1/\zeta(r) \prod_{p \mid k} (1 - p^{-r}) \geq 1/\zeta(r)$ ist, und die Konstante in $O(\ )$ von (k und) r unabhängig ist. Für die kleinste r-freie Zahl $q^{(r)}(k, l)$, welche $\equiv l \pmod{k}$ ist, ergibt sich hieraus

$$q^{(r)}(k, l) < c_1 k^{1+1/r} r^{c_2 \log k/\log\log k}$$

und bei festem r insbesondere $q^{(r)}(k, l) < k^{1+1/r+\varepsilon}$. Für großes r wird diese Abschätzung immer schlechter (z. B. für $r > \log k/\log 2$ ist ja schon jede Zahl $< k$ eine r-freie Zahl, also gilt dann jedenfalls $q^{(r)}(k, l) < k$).

Buchbesprechungen

C. F. Gauß Gedenkband anläßlich des 100. Todestages am 23. Februar 1955. Herausgegeben von *H. Reichardt.* Mit Textabb., 251 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1957. DM 25.80.

Der Herausgeber betont selbst im Vorwort, daß es entsprechend der Universalität von *Gauß* und der Spezialisierung der heutigen Mathematiker als zweckmäßig erschien, nach einführenden und historischen allgemeinen Betrachtungen für jedes Fach, dem *Gauß* sich zugewandt hat, einen Mathematiker der jeweiligen Richtung zu Worte kommen zu lassen. Die dabei entstandene Inhomogenität des Bandes habe ihren Grund weniger in der Eigenart des jeweiligen Verfassers, als vielmehr in den grundverschiedenen Arbeits- und Darstellungsweisen, die *Gauß* in den einzelnen Gebieten angewandt hat.

Die einzelnen Beiträge sind: *E. Kähler*, Leipzig: Über die Beziehungen der Mathematik zu Astronomie und Physik. *H. Salié*, Leipzig: Daten aus dem Leben und Wirken von *C. F. Gauß*. *G. J. Rieger*, Wien: Die Zahlentheorie bei *C. F. Gauß*, *R. Kochendörfer*, Rostock: *Gauß*' algebraische Arbeiten. *W. Blaschke*, Hamburg: *C. F. Gauß* und die Differentialgeometrie. *W. Klingenberg*, Göttingen: Grundlagen der Geometrie. *A. I. Markuschewitsch*, Moskau: Die Arbeiten von *C. F. Gauß* über Funktionentheorie. *K. Schröder*, Berlin: *C. F. Gauß* und die reelle Analysis. *B. W. Gnedenko*, Kiew: Über die Arbeiten von *C. F. Gauß* zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. *O. Volk*, Würzburg: Astronomie und Geodäsie bei *C. F. Gauß*. *H. Falkenhagen*, Rostock: Die wesentlichen Beiträge von *C. F. Gauß* aus der Physik.

Die dabei von den einzelnen Autoren zu leistende Arbeit wird in treffender Weise durch einen Satz gekennzeichnet, den *Kähler* in seinen Ausführungen vorbringt. „Vom Wert geschichtlicher Betrachtungen für die Mathematik ließe sich Ähnliches sagen wie ‚vom Nutzen und Nachteil der Historie für das Leben', sie sind unerläßlich, wenn es gilt, die Kraftlinien der großen mathematischen Zielsetzungen aufzufinden, sie sind unwirksam, wenn sie die gegenwärtigen mathematischen Bestrebungen nicht in das Kraftfeld jener Ziele hineinzuziehen versuchen."

Die oben bereits erwähnte Inhomogenität des Bandes zeigt sich darin, daß die meisten Autoren ungemein viel Sorgfalt darauf verwenden, die grundlegenden Ideen von *Gauß* in ihrer Wurzel zu erfassen und ihre Wirksamkeit bis in die moderne Entwicklung des betreffenden Zweiges der Mathematik aufzuzeigen, während die Beiträge von *Blaschke* und *Klingenberg* eine wertvolle Übersicht bringen, wie sich die Differentialgeometrie bzw. die Grundlagenforschung in der Geometrie seit *Gauß* weiter entwickelt haben. *P. Funk*, Wien

L. Bianchi: Opere. Vol. VII. (Problemi di Rotolamento). 360 S. Rom: Edizione Cremonese. 1957. Lire 3500.—.

Der Band umfaßt 10 kinematische Arbeiten aus den Jahren 1913 bis 1917, die sich auf das Rollen einer Fläche S auf einer zu ihr isometrischen beziehen.

Insbesondere werden die Flächen betrachtet, die ein mit S starr verbundener Punkt beschreibt bzw. eine mit S starr verbundene Ebene einhüllt, ferner die Strahlenkongruenzen, die eine Gerade als Satellit ergibt. *K. Mayrhofer*, Wien

Das Wahrheitsproblem und die Idee der Semantik. Eine Einführung in die Theorie von *A. Tarski* und *R. Carnap*. Von *W. Stegmüller*. X, 328 S. Wien: Springer-Verlag. 1957. Geb. S 198.—, DM 33.—, $ 7.85, sfr. 33.80.

Als Grundlage einer gewissen Richtung modernen philosophischen Denkens gelten in steigendem Maße sprachlogische und sprachkritische Untersuchungen, also Untersuchungen der Semantik als Lehre vom Ausdruck der Sprache und dem vom Ausdruck Gemeinten („Designatum" des Ausdrucks). Eine Hauptaufgabe der reinen Semantik, deren Sachgebiet die nach bestimmten Regeln konstruierten Sprachsysteme sind, ist die exakte Explikation des Wahrheitsbegriffes. Das Aufwerfen des seit jeher dem Philosophen gestellten Problems, was eine „wahre Aussage" sei, ermöglicht eine erste Verbindung zu den Problemen der philosophischen Tradition. Erst nach dieser begrifflichen Klärung können Fragen, wie die nach der Unbedingtheit oder Relativität der Wahrheit oder nach Wahrheitskriterien sinnvoll diskutiert werden.

Bekanntlich führt eine Definition des Begriffes „wahre Aussage" im Rahmen der Umgangssprache zu Paradoxien. Da man aber auf die elementaren logischen Gesetze nicht verzichten kann, ist der Ausweg in der Preisgabe der semantischen Geschlossenheit der Sprache zu suchen. Das bedingt eine Aufsplitterung der Sprache in eine Objektsprache und eine Metasprache. Daher der Versuch des Aufbaues von konstruierten Sprachsystemen, als deren nicht formalisierte Metasprache die Umgangssprache dient und die Beschränkung auf Explikation des Begriffes „wahr in einer Objektsprache S". Neue Schwierigkeiten treten dann in generalisierten Sprachen auf, in denen All- und Existenzaussagen möglich sind, denn Satzfunktionen sind weder wahr noch falsch; weiters in Sprachen, in denen Variable von verschiedenem Typus Verwendung finden (Lösung nach *A. Tarski*). Von *R. Carnap* stammt der Begriff der L-Semantik (es geht hier um die Abgrenzung des rein Logischen und die Explikation des Begriffes „analytischer Satz") und die Methoden der Bedeutungsanalyse; interessant sind die angeführten kritischen Bemerkungen dazu von *Ryle* und *Quine*. Ein weiteres Kapitel behandelt die logische Syntax, ihre Beziehungen zur Semantik sowie Anwendungen der Semantik in Logik, Metamathematik und Theorie des induktiven Schließens.

Besonders beachtenswert scheint die erkenntnistheoretische Diskussion des semantischen Wahrheitsbegriffes. Hier werden vom Standpunkt des Autors aus Einwände der positivistischen Logiker (Semantik setzt im Begriff der Wahrheit ein zeitlos-ideales Sein voraus), Einwände gegen die „Unrichtigkeit" des semantischen Wahrheitsbegriffes (er geht am Wesen der Wahrheit vorbei), Einwände gegen die Adäquationstheorie (die semantische Fassung des Wahrheitsbegriffes knüpft an die aristotelische Adäquationstheorie an), Einwände des modernen Positivismus (semantischer Wahrheitsbegriff ist nicht verifizierbar), Einwände gegen die „Primitivität" der konstruierten Sprachen (praktische Unbrauchbarkeit) entkräftet. Viele der aufgeworfenen Fragen grenzen hier aber schon an jenes Gebiet, wo (nach einer anderen Publikation des Autors) Entscheidung nur durch einen praktischen Entschluß dafür oder dagegen auf dem Boden konkreter Persönlichkeit möglich ist. *H. Brauner*, Wien

Determinanten und Matrizen. Von *R. Kochendörffer*. (Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bibliothek: Band 12). VI, 144 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1957. Geb. DM 6.60.

Bei der großen Zahl von Lehrbüchern über Determinanten und Matrizen ist es für jedes neue Buch nicht leicht, seine Existenzberechtigung nachzuweisen. Inhaltlich hält sich das Buch im üblichen Rahmen. Die Darstellung ist aber so leicht verständlich, daß das Buch bereits von Hörern in den ersten Semestern mit Erfolg gelesen werden kann. Es eignet sich sogar zum Selbststudium. Mit gutem Gewissen kann man das Buch den jungen Studierenden empfehlen. Sie lernen nicht nur die Determinanten- und Matrizentheorie gründlich kennen, sondern werden auch mit der in der heutigen linearen Algebra üblichen Denkweise vertraut. Die folgende Übersicht deutet den Inhalt an: Determinanten; Matrizen; Vektorräume; lineare Gleichungen; Hermitesche und quadratische Formen; weiteres über Determinanten und Matrizen (z. B. der Laplacesche Entwicklungssatz, charakteristische Wurzeln, die Cayley-Hamiltonsche Relation); Ähnlichkeit (Ähnlichkeitsklassen und -invarianten, Zerlegung in Elementarbestandteile, die Jordansche Normalform). *N. Hofreiter*, Wien

Grundzüge der Algebra. Teil I. Von *H. Lugowski* und *H. J. Weinert*. (Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bibliothek: Band 9.) Mit 15 Textabb. IV, 234 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1957. Geb. DM 10.—.

Das Buch ist der erste Teil eines dreibändigen Werkes über Gruppentheorie, Körpertheorie und Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen. Es ist aus Vorlesungen entstanden, die die Verfasser an der Pädagogischen Hochschule in Potsdam abgehalten haben. Es soll für die angehenden Lehrer an höheren Schulen ein Ersatz für die akademischen Vorlesungen sein. Aus dieser pädagogischen Einstellung erklärt sich die besondere Breite der Darstellung und die große Zahl der Aufgaben. Sehr vorteilhaft ist auch die systematische Bezeichnung aller Definitionen und Sätze. Das Buch gliedert sich in vier Kapitel. Das Kapitel I bringt die Grundbegriffe der Gruppentheorie. Während hier meist allgemeine gruppentheoretische Aussagen gemacht werden, geht Kapitel II (Permutations- und Transformationsgruppen) näher auf bestimmte Gruppen und die Natur ihrer Elemente ein. Kapitel III (Homomorphe Abbildungen) setzt die Theorie beliebiger Gruppen fort. Im Vordergrund steht der Abbildungsbegriff, der zu Isomorphie und allgemeiner zu Homomorphie führt. Kapitel IV (Einige wichtige Strukturaussagen über Gruppen) bringt die gruppentheoretischen Hilfsmittel zu dem Problem der Auflösung algebraischer Gleichungen. — Das Buch ist ob seiner ausgezeichneten Darstellung den Studierenden wärmstens zu empfehlen und eignet sich auch zum Selbststudium. *N. Hofreiter*, Wien

Convegno Italo-Francese di Algebra Astratta. Padova, 16—19 Aprile 1956. VI, 70 S. Roma: Edizione Cremonese. 1957. Lire 1000.—.

In dem Band werden die auf dieser Tagung gehaltenen Vorträge von *P. Dubreil* („Einführung in die Theorie der geordneten Halbgruppen"), *L. Lombardo-Radice* („Algebraisch-geometrische Fragen in Zusammenhang mit den Theoremen $p = 0$" — es handelt sich hier um gewisse Eigenschaften von projektiven Ebenen) und *G. Zappa* „Mit dem Untergruppenverband einer Gruppe zusammenhängende Fragen: Gegenwärtige Kenntnisse und offene Probleme") wiedergegeben; außerdem umfaßt er die Inhaltsangaben der kleineren Referate, welche gehalten

wurden von *Barlotti*, *Boccioni*, *Curzio*, *Rosati*, *Tallini* und *Zacher*. Man kann aus diesem Tagungsbericht erkennen, daß sich die italienischen Algebraiker gegenwärtig vor allem mit Fragen über Untergruppen und Untergruppenverbände sowie mit endlichen linearen Räumen beschäftigen.

W. Nöbauer, Wien

Generators and Relations for Discrete Groups. Von *H. S. M. Coxeter* und *W. O. J. Moser*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge: Heft 14.) Mit 54 Textabb., VIII, 155 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. DM 32.—.

Mit dem Problem, Gruppen durch ein Erzeugendensystem und definierende Relationen festzulegen, hat man sich im Verlauf der Entwicklung der Gruppentheorie schon sehr bald beschäftigt, und die Literatur über damit zusammenhängende Fragen ist heute kaum mehr übersehbar. Eine zusammenfassende Darstellung der mannigfaltigen Methoden und Ergebnisse auf diesem Gebiet, wie sie hier geschieht, ist daher sehr willkommen und wird bestimmt auch anregend und richtungweisend für künftige Untersuchungen sein.

Nach einem einleitenden Kapitel, welches die für das Buch grundlegenden Begriffe erklärt und in Beispielen erläutert, wird eine rechnerische Methode angegeben, mit deren Hilfe man für eine irgendwie gegebene endliche Gruppe eine abstrakte Definition finden kann; wie im nächsten Kapitel gezeigt wird, ist dies aber auch auf topologischem Wege möglich, nämlich indem man ein Cayley-Diagramm der Gruppe in eine geeignet gewählte Fläche einbettet. Im vierten Kapitel werden vor allem definierende Relationen für die siebzehn Symmetriegruppen der Ebene abgeleitet, während das fünfte die Fundamentalgruppen geschlossener Flächen von beliebiger Charakteristik behandelt. Dann werden definierende Relationen für die symmetrische und alternierende Gruppe, für verschiedene Gruppen von linearen Transformationen und andere Gruppenklassen aufgestellt. Nach einem Kapitel über reguläre Abbildungen mehrfach zusammenhängender Flächen und über die Automorphismen solcher Abbildungen werden schließlich noch Gruppen mit einem Erzeugendensystem aus lauter Elementen der Ordnung 2 eingehend behandelt. Eine Anzahl von Tabellen, in denen vor allem definierende Relationen für zahlreiche bekanntere Gruppen enthalten sind, sowie ein umfangreiches Literaturverzeichnis beschließen das Buch.

W. Nöbauer, Wien

Lie Groups. Von *P. M. Cohn*. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics: Nr. 46.) VI, 164 S. Cambridge: At the University Press. 1957. 22 s 6 d.

Diese Einführung in die Theorie der Lie-Gruppen setzt beim Leser an Vorkenntnissen nur die Grundbegriffe der analytischen Topologie sowie die grundlegenden Sätze über Gruppen und Vektorräume voraus. Was von der Theorie der analytischen Mannigfaltigkeiten und der Theorie der topologischen Gruppen benötigt wird, wird in den Anfangskapiteln entwickelt. Das Kernstück des Buches bildet die Untersuchung der Beziehungen zwischen Lie-Gruppen und Lie-Algebren, welche zum Beweis der Lieschen Fundamentalsätze und ihrer Umkehrungen führt. Ziemlich ausführlich werden Untergruppen und Homomorphismen der Lie-Gruppen behandelt; das Schlußkapitel beschäftigt sich mit der universellen Überlagerungsgruppe einer zusammenhängenden Lie-

Gruppe. Der zwar knapp, aber klar und flüssig geschriebene Text wird ergänzt durch instruktive Beispiele und Übungsaufgaben.

Das Buch macht es dem Leser möglich, ohne besondere Mühe die Grundtatsachen dieses wichtigen, interessanten und schönen Teilgebietes der Mathematik in moderner Darstellungsweise kennenzulernen; es fügt sich daher sehr gut in die bewährte Reihe der „Cambridge-Tracts" ein. *W. Nöbauer*, Wien

Einführung in die höhere Mathematik. Von *H. v. Mangoldt-K. Knopp*. III. Band: Integralrechnung und ihre Anwendungen, Funktionentheorie, Differentialgleichungen. Zehnte, vollständig neubearbeitete Auflage. Mit 107 Textabb., XV, 640 S. Leipzig: S. Hirzel, Verlag. 1957. Geb. DM 22.—.

Die bewährte Anlage und die Stoffauswahl wurden auch in der 10. Auflage im Großen beibehalten. Aber *K. Knopp* hat noch einmal alles durchdacht, einige Ergänzungen gegeben und an einzelnen Stellen die Darstellung gefeilt. Nach seinem Ableben besorgte *Fr. Lösch* das letzte Korrekturenlesen. Von ihm wird auch ein 4. Band zur „Einführung in die höhere Mathematik" vorbereitet. — Die Literaturangaben wurden wieder auf den neuesten Stand gebracht. Das Werk wird auch weiterhin den Studierenden ein zuverlässiger und gründlicher Helfer sein. *N. Hofreiter*, Wien

Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung. Von *H. Reichardt*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 34.) Mit 35 Textabb. XI, 499 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1957. Geb. DM 41.20.

Das Buch behandelt die Vektor- und Tensorrechnung in möglichst allgemeiner Form, soweit es sich um multilineare Algebra handelt im Anschlusse an die Auffassung von *N. Bourbaki* (Algèbre, Paris 1947/48). Dem ganzen Kalkül werden nicht die reellen Zahlen, sondern die Elemente eines beliebigen Körpers zugrunde gelegt, dabei aber an der Endlichkeit der Anzahl der Dimensionen festgehalten. Welche neuen Erscheinungen bei unendlich vielen Dimensionen auftreten können, zeigt die als Anhang beigefügte affine und metrische Theorie der Integralgleichungen. Die ganze Darstellung hält sich an die gruppentheoretische Auffassung der Geometrie im Sinne des Erlanger Programmes. Als wichtigste Anwendung wird die Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit den alternierenden Differentialformen als Zentrum behandelt, ferner die Theorie der affin zusammenhängenden Räume im Sinne von *H. Weyl*, sowie die der Riemannschen Räume; dabei werden bei letzteren nicht nur die definiten Metriken betrachtet, sondern auch die indefiniten, wie sie in der allgemeinen Relativitätstheorie auftreten.

Wenn auch das Buch nur wenige Vorkenntnisse voraussetzt, dürfte dennoch für seine Lektüre eine gewisse Reife unerläßlich sein. Dann aber bietet es einen gründlichen Einblick in einen umfangreichen, bisher nur verstreut dargestellten Stoff, wie er auf Grund seiner inneren Zusammenhänge fast zwangsläufig erwächst. *K. Mayrhofer*, Wien

Teoria miary i calki lebesgue'a. Von *S. Hartman* und *J. Mikusiński*. Mit 12 Textabb., 140 S. Warschau: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1957. Cena zl. 10.—.

Es ist nicht einfach, die Theorie des Lebesgue'schen Maßes und Integrales für den Studenten mittleren Semesters in knapper Form darzustellen. Im vorliegenden Büchlein gelingt die Lösung dieser Aufgabe in vorbildlicher Weise.

Inhalt: Mengen. Abzählbarkeit. Offene und abgeschlossene Mengen auf der Geraden. Maß offener Mengen. Lebesgue'sches Maß, Meßbarkeit. Totale Additivität des Maßes. Mengen vom Maß Null. Meßbarkeit von Funktionen. Operationen mit meßbaren Funktionen. Integral beschränkter Funktionen. Nicht beschränkte Funktionen. Integration von Funktionenfolgen. Konvergenz dem Maße nach (Maßkonvergenz). Gleichgradige Totalstetigkeit. Funktionen beschränkter Schwankung. Ableitung von Integralen. Totalstetige Funktionen. Approximation meßbarer Funktionen durch stetige. Der Raum L^p. Konvergenz im Mittel. Approximation der Funktionen aus L^p durch stetige. Orthogonalsysteme. Satz von *Riesz-Fischer*. Vollständigkeit. Das Maß in der Ebene und im Raum. Mehrfache Integrale und iterierte Integrale. Das Stieltjes-Integral. Zusammenhang mit dem Lebesgue'schen.

Wie man sieht, eine ziemlich vollständige Einführung in die Lebesgue'sche Theorie. Dabei ist die Darstellung überall klar und setzt keine besonderen Vorkenntnisse voraus und ist infolgedessen für Anfänger besonders geeignet.

K. Prachar, Wien

Zum Konturproblem der Hodographenmethode im Unterschall. Von *H. Schubert* und *E. Schinke*. (Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse: Band 102, Heft 2.) 24 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1957. DM 2.20.

In der Ebene wird eine stationäre Unterschallströmung ohne Zirkulation um ein Profil S gesucht, welches in Bezug auf die Koordinaten x, y symmetrisch ist.

H. Hornich, Wien

Raum und Gegenraum. Von *L. Locher-Ernst*. Mit 204 Textabb., 216 S. Dornach (Schweiz): Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum. 1957. Geb. sfr. 27.50.

Das Buch vermag einem größeren Kreise eine Einführung in die projektive Geometrie in synthetischer Behandlung zu geben. Es ist getragen vom Glauben des Verfassers an die anthroposophische Lehre und an die Bedeutung der projektiven Geometrie für diese Lehre. Das Buch verdient aber auch unabhängig davon Beachtung wegen seiner didaktischen Vorzüge; man kann ihm viele Hinweise entnehmen, wie die herkömmliche Art, in der projektive Geometrie in Büchern, Vorlesungen und Übungen gelehrt wird, zugunsten des Lernenden verbessert werden kann. Die Darstellung ist sehr ausführlich und trotz manch ungewohnter Bezeichnungen gut verständlich. Zahlreiche Bemerkungen psychologischer oder historischer Art beleuchten den geometrischen Gehalt. — Die Teilung der Ebenen durch Geraden, die Teilung des Raumes durch Ebenen, Übertragungen ins Duale, auch gewisse topologische Fragen werden eingehend behandelt. Das Buch enthält über 200 ausgezeichnete Figuren; sie sind von einer Prägnanz und Anschaulichkeit, wie man sie nur selten findet.

F. Hohenberg, Graz

Vorlesungen über Darstellende Geometrie. Von *K. Strubecker*. (Studia Mathematica: Band XII). Mit 202 Textabb., IX, 324 S. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1958. DM 16.80.

Dieses Lehrbuch ist aus einführenden Vorlesungen über darstellende Geometrie entstanden, die der Verfasser an der Technischen Hochschule in Karlsruhe

gehalten hat. Dem Buch liegt nach des Verfassers eigenen Worten der leitende Gedanke zugrunde, „den mathematischen und geometrischen Kern des Gegenstandes deutlich hervortreten zu lassen". Dadurch wird das Buch ein mathematisches Lehrbuch für die Studierenden der verschiedenen technischen Fachrichtungen, der Mathematik und Naturwissenschaften und der Kandidaten des höheren Lehramtes. Mit dieser Zielsetzung hat der Verfasser Anwendungen der darstellenden Geometrie nicht in das Buch aufgenommen.

Besondere Sorgfalt wird auf die Herstellung der Querverbindungen mit jenen mathematischen Gebieten gelegt, auf die die Beschäftigung mit der darstellenden Geometrie führt. Es sind dies die Grundbegriffe der algebraischen Geometrie, die die Einführung der komplexen Elemente erfordert, und die Differentialgeometrie, die zur konstruktiven Behandlung der Kurven- und Flächenkrümmung herangezogen wird.

Das Buch ist durch eine klare und flüssige Schreibweise ausgezeichnet, und was für den Anfänger besonders wichtig ist, die Gedankengänge und Konstruktionsverfahren werden in voller Ausführlichkeit dargelegt. Auch die reiche Ausstattung des Lehrstoffes mit gut ausgeführten Textfiguren wird dem Leser vorzügliche Dienste leisten.

Der als mathematischer Forscher und Schriftsteller ausgezeichnete und anerkannte Verfasser hat damit ein Lehrbuch geschaffen, das durch seine Eigenart und Vorzüge den Studierenden der Technischen Hochschulen und Universitäten wärmstens empfohlen werden kann. Das Buch wird zweifellos einen ehrenvollen Platz in der einschlägigen Lehrbuchliteratur einnehmen.

Über den behandelten Lehrstoff geben die folgenden Kapitelüberschriften Aufschluß: Abbildungsverfahren. Parallelprojektion und perspektive Affinität. Grund- und Aufrißverfahren. Konstruktionsaufgaben. Darstellung ebenflächig begrenzter Körper. Schrägrisse räumlicher Objekte. Drehzylinder. Drehkegel. Schiefer Kreiskegel. Schiefer Kreiszylinder. Kugel. Algebraische Kurven und Flächen. Drehflächen. Ebene Schnitte von Drehflächen. Durchdringung von zwei Drehflächen. Durchdringung zweier beliebiger Flächen. Schraublinien und Schraubflächen. Ergänzungen zur Theorie der Flächenkrümmung.

E. Kruppa, Wien

Circles. Von *D. Pedoe.* (International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics: Band 2). Mit 66 Textabb., X, 78 S. London-New York-Paris: Pergamon Press. 1957.

Manche Dinge in der Mathematik haben seit jeher einen besonderen Reiz ausgeübt. So sind es etwa in der Zahlentheorie die Eigenschaften der Primzahlen oder in der Geometrie die Eigenschaften des Kreises und der Kugel. Ein Buch wie dieses, das in elementarer Darstellung von Kreisen handelt, wird daher einen größeren Leserkreis finden. Insbesondere ist es den Studierenden der Mathematik sehr zu empfehlen. Klarerweise wird eine Auswahl unter den vielen Eigenschaften des Kreises getroffen. Kapitel I beginnt mit dem 9-Punkte-Kreis des Dreiecks, handelt weiter von der Inversion, von Kreisbüscheln und von dem Problem des *Appolonius.* Kapitel II bringt interessante Zusammenhänge, die sich aus der Zuordnung der Kreise $x^2 + y^2 - 2\,a\,x - 2\,b\,y + c = 0$ in der Ebene und den Punkten (a, b, c) im Raum ergeben. Kapitel III entwickelt zunächst Einfachstes aus der Funktionentheorie wie Doppelverhältnis von 4 komplexen Zahlen, lineare Transformationen in der Gauß'schen Zahlenebene, und führt zu dem Poincaréschen Modell der hyperbolischen nichteuklidischen Geometrie, bei dem doch die Kreise eine wichtige Rolle spielen. Kapitel IV behandelt die isoperi-

metrische Eigenschaft des Kreises. Um den Existenzbeweis zu erbringen, werden Hilfsmittel aus der reellen Analysis bereitgestellt. *N. Hofreiter*, Wien

Théorie élémentaire des géométries non euclidiennes. Tome I. Von *A. Tresse*. Mit 72 Textabb., 150 S. Paris: Gauthier-Villars. 1957. ffr. 2500.—.

Diese Einführung in die ebene nichteuklidische Geometrie im konformen Modell zeichnet sich durch prägnante Formulierungen und didaktisch geschickten Aufbau aus und ist auch für den interessierten Mittelschüler durchaus lesbar. So werden etwa die zur analytischen Erfassung nötigen Funktionen (logarithmische Funktion, Kreis- und Hyperbelfunktionen) ausführlich eingeführt und sämtliche ihrer Eigenschaften, die im Buch benötigt werden, besprochen. Die zahlreichen Textfiguren erleichtern naturgemäß das Studium sehr.

Ein kurzes Inhaltsverzeichnis: Eigenschaften der Inversion, Grundelemente der hyperbolischen und elliptischen konformen Geometrie, Abstands- und Winkelmessung, Winkelsymmetrale, Kreise, kongruente Transformationen, Um- und Inkreis eines Dreiecks, Winkelsumme im Dreieck, rechtwinkelige Polygone, Rektifikation des Kreises. *H. Brauner*, Wien

An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Band 1. Von *W. Feller*. Zweite Auflage. XV, 461 S. New York: J. Wiley & Sons, Inc. — London: Chapman & Hall, Ltd. 1957. $ 10.75.

Der erste Band des bekannten Standardwerkes ist nun in zweiter Auflage erschienen. Gegenüber der ersten Auflage (vgl. die Besprechung Monatshefte **55** (1951), 358) wurden zahlreiche kleinere Verbesserungen zusammen mit einem vollständig neuen Kapitel über Schwankungserscheinungen bei Irrfahrtenproblemen hinzugefügt. Ferner wurden diejenigen Teile des Buches genauer gekennzeichnet, die bei der ersten Lektüre übersprungen werden können, so daß auch der Leser, den allzu spezielle Fragen nicht interessieren, das Buch mit Vorteil benützen kann. Wenn der Verfasser im Vorwort zur zweiten Auflage sagt „außer einer unerwarteten Anzahl von Leuten, die es benützen, scheint das Buch auch Freunde gefunden zu haben, die es zum Vergnügen lesen", so kann man hinzufügen, daß die Anzahl der letzteren durch die Neuauflage wohl noch beträchtlich anwachsen wird. *K. Prachar*, Wien

Grundlagen der mathematischen Statistik. Vom *L. Schmetterer*. 14 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1957. DM 1.60.

Diese Schrift ist im wesentlichen der Inhalt der Antrittsvorlesung des Verfassers an der Universität Hamburg. Die mathematische Statistik hat in den letzten 25 Jahren einen großartigen Aufschwung genommen. Heute ist sie nicht nur für den Naturwissenschaftler, sondern auch für die Medizin, Psychologie, Ökonometrie, Soziologie und in der Technik von großer Bedeutung. Der Verfasser legt dar, daß die moderne maßtheoretische Wahrscheinlichkeitsrechnung zusammen mit einer solchen Häufigkeitsdeutung die Grundlage der modernen mathematischen Statistik ist. *N. Hofreiter*, Wien

Proceedings of the third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Vol. III: Astronomy and Physics. Herausgegeben von *Jerzy Neyman*. 252 S. Berkeley Calif.: University of California Press. 1956.

Die Beiträge dieses Bandes zur Astronomie gruppieren sich um zwei Grundthemen: Hertzsprung-Russell-Diagramm (HRD) und räumliche Verteilung der extragalaktischen „Nebel" (galaxies). *O. J. Eggen* steuerte eine auf den neuesten Stand gebrachte Zusammenstellung des HRD der sonnennahen Sterne bei. *J. L. Greenstein* versucht bei Sternen unternormaler Leuchtkraft Beziehungen zwischen spektralen Eigenheiten und Bewegungsverhältnissen aufzudecken, allerdings angesichts der meist kleinen Parallaxen ohne überzeugenden Erfolg. Ähnliches gilt von den zwei diskreten Sequenzen, die *G. E. Kron* noch neben den Unterzwergen bei den roten Zwergsternen zu finden meint. *H. L. Johnson* stellt bekannte Beobachtungsergebnisse zum HRD einiger Sternhaufen kurz zusammen und skizziert diskutable Deutungsmöglichkeiten. Der inhaltschwere Beitrag von *B. Strömgren* ergänzt dessen umfangreichen Artikel im Astronomical Journal **57** (1952) durch beachtenswerte neue Gesichtspunkte. Vom Gesamtrahmen des Symposiums her gesehen wäre vielleicht zu sagen, daß alle bisher besprochenen Arbeiten nicht sehr viel von statistischer Methode im engeren Sinn enthalten, unbeschadet ihres astrophysikalischen Wertes.

Zum zweiten Hauptthema leitet *G. C. McVittie* über, indem er in temperamentvoller Weise Beachtung der Tatsache verlangt, daß man in kosmischen Größenordnungen Begriffe wie „Entfernung" u. a. nicht mehr gemäß naiven Vorstellungen handhaben darf, ohne von vornherein mit den Prinzipien der Relativitätstheorie in Konflikt zu kommen. In ausgezeichneter Zusammenfassung berichtet der Herausgeber gemeinsam mit *C. D. Shane* und *E. L. Scott* über den gegenwärtigen Stand der Statistik extragalaktischer Nebel sowohl nach der empirischen wie nach der theoretischen Seite hin. In durchsichtiger Weise wird zuerst das Problem der einfachen Haufenbildung und dann jenes der übergeordneten Gruppen von Nebelhaufen samt einigen interessanten vorläufigen Ergebnissen behandelt. Beim Übergang zum expandierenden Universum ist es allerdings unwahrscheinlich, daß die für die Distanzen der Haufenzentren gültige Hubblekonstante auch innerhalb der Nebelhaufen anzuwenden sei. Weitgehend auf ganz eigenen, vielleicht sehr zukunftsträchtigen Wegen bewegt sich der Beitrag von *F. Zwicky*; er nimmt manche Gedanken des kürzlich von demselben Autor erschienenen Buches „Morphological Astronomy" vorweg, die aus Raumrücksichten hier nicht näher gewürdigt werden können.

K. Ferrari d'Occhieppo, Wien

Die Arbeiten physikalischen Inhaltes werden eingeleitet von zwei Untersuchungen, welche, historisch und sachlich gesehen, in gewissem Zusammenhang stehen. Die Arbeit von *A. Blanc-Lapierre* und *A. Tortrat* beschäftigt sich mit der wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlegung der statistischen Mechanik, während die anschließende Arbeit von *M. Kac* die Boltzmann'sche Gleichung der kinetischen Gastheorie untersucht. Die erstgenannte Arbeit weist Zusammenhänge mit den bekannten Untersuchungen von *Chintschin* auf und stellt im wesentlichen eine ausführliche und erweiterte Darstellung zweier Comptes-Rendus-Noten des einen bzw. beider Verfasser dar. Die Arbeit von *Kac* ist vom Bestreben geleitet, die Boltzmann'schen Überlegungen (Stoßzahlansatz, der übrigens auf *Clausius* zurückgeht, Ableitung des H-Theorems) mit modernen Hilfsmitteln wieder aufzunehmen. Überdies wird die Störungsrechnung zur Lösung der nichtlinearen *Boltzmann*-Gleichung hinzugezogen. Die Arbeit von *Kampé de Ferriet* erweitert zwei Comptes-Rendus-Arbeiten des Verfassers zu einer etwas ausführlicheren Darstellung. Es handelt sich kurz gesagt darum, die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie und die klassische Anfangswertaufgabe der Wärmeleitung für zufällige Rand- bzw. Anfangswertbedingungen

zu betrachten. Für die Turbulenztheorie wäre es wünschenswert, ein analoges Problem für die Navier-Stokes'schen Gleichungen anzugreifen. Es folgt eine umfangreiche Arbeit von *E. Montroll* über Schwingungen von kubischen Kristallgittern. Das erste wesentliche Problem ist die Untersuchung des Spektrums, worüber der Verf. unlängst in den Amer. Math. Monthly berichtet hat. Im weiteren werden die Frage nach der räumlichen Verteilung der Abweichungen eines Atoms vom Gleichgewichtszustand und lokale Störungen im Gitter behandelt. Der Band schließt mit der kurzen Arbeit von *M. Wiener* über allgemeine Fragen der nichtlinearen Prediction und Dynamik. *L. Schmetterer*, Hamburg

Rachunek operatorów. Von *J. Mikusinski.* (Monografie Matematyczne: Band 30.) 374 S. Warschau: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1957. Cena zl. 39.—.

Die vorliegende 2. Auflage hat gegenüber der ersten (vgl. die Besprechung, Monatshefte 58 (1954), 218) verschiedene Erweiterungen erfahren. So wurden vor allem weitere Anwendungen der Operatorenrechnung in der Elektrotechnik aufgenommen und ein Abschnitt über Anwendungen in der Statik hinzugefügt. Auch im theoretischen Teil wurden einige kleinere Verbesserungen vorgenommen. Man kann das ausgezeichnete Buch nun nur noch mehr für ein Studium der Operatorenrechnung empfehlen. *K. Prachar*, Wien

Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der mathematischen Physik. Von *N. M. Günter.* Mit 34 Abb., X, 341 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1957. Kunstleder DM 18.—.

Es ist sehr zu begrüßen, daß das klassische Werk des russischen Mathematikers *N. M. Günter*, welches zuerst 1934 in französischer Sprache erschienen ist, nun auch in deutscher Übersetzung vorliegt, und zwar nach der russischen Ausgabe mit Ergänzungen und Erweiterungen durch *Smirnow.* Das Buch stellt sich die Aufgabe, die Potentialtheorie und die klassischen Randwertaufgaben unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen in mathematisch einwandfreier Weise zu behandeln. Neben dem Werk von *Kellogg*, „Foundations of Potential Theory", welches ja ähnliche Ziele verfolgt, nimmt das vorliegende Werk in der Literatur eine fundamentale Stellung ein. Es genügt daher eine kurze Inhaltsangabe.

Nach einer ausführlichen Einleitung folgt die Theorie des Potentials, dann die Theorie des Neumannschen und des Robinschen Problems, dann folgt das Dirichletsche Problem, und den Abschluß bildet die Theorie der Greenschen Funktionen und ihre Anwendung auf Wellen- und Wärmegleichung. Vier Anhänge und eine kurze Biographie des 1941 verstorbenen, verdienstvollen Verfassers beschließen das Buch.

Die Darstellung zeichnet sich wie ja bei allen russischen Lehrbüchern durch Ausführlichkeit und Klarheit aus. *E. Hlawka*, Wien

Grundprobleme der mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen. Von *C. Müller.* (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band LXXXVIII.) Mit 8 Textabb., IX, 344 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. DM 49.60, Geb. DM 52.80.

In diesem Buch wird zum ersten Mal die Theorie der elektromagnetischen Schwingungen allgemein behandelt. Die auftretenden Probleme wurden erst in

den letzten Jahren erfolgreich gelöst. Dies verdanken wir vor allem dem Verfasser des vorliegenden Werkes.

Die Aufgabe der Theorie ist folgende: In einem mit Materie erfüllten Raum sind zeitlich periodische elektrische und magnetische Ströme gegeben. Man bestimme das zugehörige elektromagnetische Feld. Im homogenen stromfreien Raum genügen die Komponenten des elektromagnetischen Feldes bekanntlich der Helmholtzschen Schwingungsgleichung. Es ist klar, daß eine Theorie dieser Gleichung in das Buch gehört. Will man die Lösungen dieser Gleichung beherrschen, so muß man ihr Verhalten im Unendlichen kennen (*Sommerfeld*). Die dabei benötigten Sätze aus der Theorie der Kugelfunktionen und Besselfunktionen werden in einheitlicher Weise hergeleitet, gestützt auf die Arbeiten von *Funk*, *Hecke* und *Herglotz*.

Das allgemeine Problem der elektromagnetischen Schwingungen wird auf ein System von Integralgleichungen zurückgeführt (Die Theorie der Integralgleichungen wird in dem Buch nicht vorausgesetzt, sondern ausführlich in einem eigenen Abschnitt entwickelt). Die Behandlung dieses Systems erfordert ausgedehnte Überlegungen differentialgeometrischer Natur, welche auch an und für sich von allgemeiner Bedeutung sind und die sich hier wohl zum ersten Mal in so ausführlicher Weise finden.

Aus der kurzen Übersicht ersieht man, daß es sich um ein hoch bedeutsames Werk handelt, wichtig für den Physiker, Techniker, wie für den Mathematiker.

Hinweisen möchte ich noch auf das Eingangskapitel des Buches über die Grundbegriffe der Vektoranalysis.

Die Darstellung ist sorgfältig und so ausführlich, daß man auch längeren Entwicklungen leicht folgen kann. *E. Hlawka*, Wien

Theorie schallnaher Strömungen. Von *K. G. Guderley*. Mit 125 Textabb., XV, 376 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. Geb. DM 42.—.

Bekanntlich weisen Gasströmungen weitgehende Verschiedenheiten auf, je nachdem die Strömungsgeschwindigkeit kleiner oder größer als die Schallgeschwindigkeit ist. Unter „schallnahen" Strömungen werden solche verstanden, die innerhalb ihres Strömungsfeldes gleichzeitig Überschall- und Unterschallgebiete enthalten. Das Verständnis solcher Strömungen bereitet sowohl vom physikalischen als auch vom mathematischen Standpunkt aus große Schwierigkeiten. Der Verf. setzt sich zum Ziel, die in den letzten Jahren erzielten Fortschritte auf diesem Gebiet, die durch eine enge Wechselwirkung zwischen physikalischem und mathematischem Denken gekennzeichnet sind, einerseits dem Aerodynamiker, andererseits dem angewandten Mathematiker nahezubringen und sie zu weiteren Forschungen anzuregen. Auf eine Darstellung der allgemeinen Grundlagen (Kap. I) folgen Ähnlichkeitsbetrachtungen für schallnahe Strömungen (Kap. II) und die linearisierte Behandlung derselben (Kap. III). Für die Potentialgleichung schallnaher Strömungen

$$-(\varkappa+1)\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}=0 \quad (\varkappa=c_p/c_v;\ \Phi=\text{Geschwindigkeitspotential})$$

werden Beispiele exakter Lösungen in Kap. IV wiedergegeben. Daran schließt die Hodographenmethode und die auf ihr beruhende Diskussion schallnaher Strömungsfelder (Kap. V; VI). In dem rein mathematischen Kap. VII werden

partikulare Lösungen der *Tricomi*schen Gleichung $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} = 0$ ($\eta, \vartheta =$ = rechtwinklige, ebene Koordinaten) untersucht. Dann folgen noch Strömungen mit der *Mach*schen Zahl Eins (Kap. VIII) und Strömungsfelder, die nur wenig von solchen abweichen (Kap. IX). Einzeluntersuchungen über Partikularlösungen der *Tricomi*schen Gleichung (Kap. X) und über achsensymmetrische Strömungen (Kap. XI) beenden das klar und flüssig geschriebene Buch. Ein ausführliches Literatur- und Sachverzeichnis ist beigefügt. *Th. Sexl*, Wien

Licht, Materie, Weltall im einheitlichen Naturbild. Von *E. H. Lüpfert*. 76 S. Stuttgart: Birkenkopf-Verlag. 1958. DM 4.—.

Vorliegende Schrift enthält in drei Abschnitten, 1. Licht; 2. Materie; 3. Weltall betitelt eine allgemeinverständliche, sehr gut lesbare Darstellung der modernen physikalischen Probleme auch vom historischen Standpunkt aus und gibt dann am Ende jedes der drei Abschnitte eine neue metaphysische Deutung derselben. Diese Deutung nimmt neben der Schicht der wahrnehmbaren Vorgänge, die zu erforschen heute meist allein als exakte Wissenschaft gilt, noch eine zweite nach Ansicht des Verf. ebenso wirkliche Schicht an, die zwar unseren Sinnen unmittelbar verschlossen ist, aber an den Geschehnissen der wahrnehmbaren Schicht beteiligt ist und sich deshalb in dieser Schicht mittelbar zu erkennen gibt. Die wahrnehmbare Schicht nennt der Verf. „Realschicht", die andere „Grundschicht". Diese neue metaphysische Deutung führt jedoch in den Händen des Verf. zu keinerlei neuen Voraussagen über mögliche physikalische Versuchsergebnisse und daher bleibt die Annahme oder Ablehnung der neuen metaphysischen These für den Physiker zumindest vorläufig ohne praktische Konsequenzen. *Th. Sexl*, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien. I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Soeben erschien:

Vom Ursprung und Ende der Metaphysik

Eine Studie zur Weltanschauungskritik

Von

Ernst Topitsch

Professor an der Universität Wien

IV, 320 Seiten. Gr.-8°. 1958. Ganzleinen S 156.—, DM 26.—, sfr. 26.60, $ 6.20

Während dem Menschen der Gegenwart von allen Seiten her Weltanschauungen angeboten oder aufgedrängt werden, sucht dieses Buch die Grundformen der Weltanschauungen wissenschaftlich zu analysieren. Die Neuheit seiner leitenden Aspekte und seiner Ergebnisse, die Weite seines Gesichtskreises und die Fülle des verarbeiteten Materials machen es für den Forscher wertvoll; darüber hinaus ist es für alle geschrieben, die gegenüber einem in Ideologie und Sentimentalität verfallenen Philosophieren kritischen Abstand bewahren wollen. Die kompromißlose Folgerichtigkeit, mit welcher hier die Entmythologisierung des Denkens durchgeführt wird, dürfte von mancher Seite Widerspruch erfahren, aber auch zu fruchtbarer Diskussion Anlaß geben.

Soeben erschien:

Einführung in die geometrische und physikalische Kristallographie

und in deren Arbeitsmethoden

Von

Prof. Dr. **Franz Raaz** und Prof. Dr. **Hermann Tertsch**

Wien Wien

Dritte, wesentlich erweiterte Auflage

Mit 384 Textabbildungen. XII, 367 Seiten. Gr.-8°. 1958

Ganzleinen S 288.—, DM 48.—, sfr. 49.10, $ 11.45

Die freundliche Aufnahme, die das Buch bisher in Fachkreisen gefunden hat, bestärkte die Verfasser in der Überzeugung, daß der hinsichtlich der Darbietung des Stoffes eingeschlagene Weg der richtige war. Der mehrfach geäußerte Wunsch nach einer wesentlichen Erweiterung des gebotenen Stoffes veranlaßte die Verfasser dazu, in der dritten Auflage den kristallgeometrischen Teil durch die Grundlagen der Strukturtheorie und einen Abriß über die Röntgenkristallographie zu ergänzen, während im zweiten Teil nunmehr neben der Kristalloptik auch die übrigen Kapitel der Kristallphysik eine einführende Darstellung finden. Aber auch hiebei wurde streng daran festgehalten, das Stoffgebiet so darzustellen, daß dieses Buch die bekannten, eingehenden Handbücher (auf die ständig verwiesen wird) nicht ersetzen, wohl aber dazu dienen soll, deren Handhabung nutzbringend vorzubereiten und zu erleichtern.

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Soeben erschien die zweite, verbesserte Auflage:

Integraltafel

Herausgegeben von

Wolfgang Gröbner und **Nikolaus Hofreiter**

o. Professor an der Universität Innsbruck — o. Professor an der Universität Wien

Erster Teil: Unbestimmte Integrale

Zweite, verbesserte Auflage. VIII, 166 Seiten. 4°. 1957

Steif geheftet S 136.—, DM 22.70, sfr. 23.20, $ 5.40

Aus den Besprechungen zur ersten Auflage

„Die vorliegende Sammlung von unbestimmten Integralen ist reichhaltig, ohne überladen zu sein. Die sorgfältige Auswahl der Integrale und ihre Anordnung nach Integranden machen das Aufsuchen leicht ... Besonders ausführlich werden auf 37 Seiten die elliptischen Integrale verzeichnet, wobei verschiedene Normalformen berücksichtigt und eine Reihe von Transformationsmöglichkeiten angegeben werden. Die Zuverlässigkeit der Tafeln wurde noch dadurch erhöht, daß das Buch in einer gut lesbaren, sauberen Handschrift gedruckt wurde, wodurch Fehler beim Setzen vollständig ausgeschlossen sind. Das Werk wird sowohl dem Mathematiker als auch dem um die Anwendungen der Mathematik Interessierten manche mühselige Arbeit erleichtern."

Elemente der Mathematik

Zweiter Teil: Bestimmte Integrale

Zweite, verbesserte Auflage. VI, 204 Seiten. 4°. 1958

Steif geheftet S 162.—, DM 27.—, sfr. 27.60, $ 6.45

Aus den Besprechungen zur ersten Auflage

„Der vorliegende zweite Teil der Integraltafel befriedigt ein dringendes Bedürfnis der Mathematiker, Naturwissenschaftler und Techniker, die allesamt die zeitraubende und oftmals auch schwierige Berechnung bestimmter Integrale als lästig empfinden... Der große Umfang des bearbeiteten Materials berücksichtigt weitgehend die praktischen Bedürfnisse und begründet damit den Wert der vorliegenden Tafel. Durch die Einführung geeigneter Parameter konnten gleichartige Integrale in übersichtlicher Weise zu Typen zusammengefaßt werden, was die Anwendung der Tafel sehr erleichtert. In jedem Falle wird der Gültigkeitsbereich der ausgewiesenen Formel angegeben.
Während die unbestimmten Integrale stets eine Überprüfung der Richtigkeit durch Differentiation zulassen, ist dies bei bestimmten Integralen nicht möglich. Um die notwendige Zuverlässigkeit der Tafel zu gewährleisten, wurde daher jedes Integral von den Verfassern in voneinander unabhängigen Rechnungsgängen mehrfach ermittelt, wobei nach Möglichkeit verschiedene Wege beschritten wurden. Besonders nützlich sind die vielen Hinweise zur Berechnung spezieller Integrale, die es oftmals gestatten, auch solche Integrale zu berechnen, die in die Tafel nicht aufgenommen werden konnten ..."

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung